

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ СРЕД  
СЛОЖНОГО СТРОЕНИЯ И СТРУКТУРЫ  
НА СВЕРХДАЛЬНИЕ РАССТОЯНИЯ

А. Г. Фатьянов

**Аннотация.** Разработан аналитический метод моделирования сейсмических волновых полей для широкого круга геофизических сред (включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т. п.) на сверхдальние расстояния. Поскольку не используются конечно-разностные аппроксимации, не возникает сеточной дисперсии при расчетах волновых полей для произвольных моделей сред и систем регистраций. Аналитическое представление решения позволяет проводить анализ полного поля по частям, в частности, получать однократные волны. На основе созданного программного модуля расчета волновых полей проведено моделирование сейсмического «звона» на Луне. Проведено сравнение с лучевым методом.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, аналитическое решение, полное волновое поле, однократные волны, упругие, пористые, неупругие, анизотропно-неупругие, случайно-неоднородные среды; лучевой метод.

**A. G. Fatyanov. Analytical modeling of wave fields for complex subsurface geometries for super-long distances.**

**Abstract:** We propose an analytical method of modeling seismic wave fields for a wide range of geophysical media: elastic, non-elastic, anisotropic, anisotropic-non-elastic, porous, random-inhomogeneous, etc. for super-remote (far) distances. As finite difference approximations are not used, there is no grid, no dispersion when computing wave fields for arbitrary media models and observation points. The analytical solution representation in the spectral domain makes possible to carry out analysis of a wave field in parts, specifically, to obtain the primary waves. Based on the developed program of computing wave fields, we have carried out the simulation of seismic "ringing" on the Moon. Obtained comparison with ray method.

**Keywords:** mathematical modeling, analytical solution, full wave field, primary waves, elastic, non-elastic, anisotropic-non-elastic, porous, random-inhomogeneous media; seismic ray method.

Введение

В настоящее время одним из основных инструментов исследования процессов распространения сейсмических волн для различных моделей сред является математическое моделирование. Постоянное совершенствование измерительных инструментов приводит, с одной стороны, к повышению точности экспериментальных данных, с другой — к увеличению пространственно-временных

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14-07-00832, 15-07-06821).

масштабов. Это влечет необходимость разработки новых и совершенствования известных вычислительных методов расчета волновых полей. В работе развит аналитический метод моделирования, позволяющий рассчитывать волновые поля для значительных пространственно-временных масштабов, возникающих при проведении экспериментальных работ.

Важное, а зачастую и определяющее значение для задач интерпретации экспериментальных данных имеет возможность анализа полного волнового поля по частям. В работе развит аналитический алгоритм моделирования волновых полей на сверхдальние расстояния, не имеющий ограничений по точности, моделям сред и базам наблюдения и позволяющий рассчитывать динамику отдельно взятых волн (однократные, волны спутники и т. п.) без ограничений лучевого метода. В результате сравнения с лучевым методом показано, что к известным геометрическим ограничениям лучевого метода добавляются еще и ограничения, связанные с длительностью входного импульса.

Развитый аналитический метод моделирования позволяет рассматривать разнообразные прикладные задачи. В настоящей статье проведено математическое моделирование волнового сейсмического поля для модели упругой Луны, в которой имеется приповерхностная зона малых скоростей (ЗМС) в случае значительных пространственно-временных масштабов (часовые записи экспериментальных данных). Моделирование проведено в рамках 3D плоскостной среды. Лунные сейсмограммы значительно отличаются от сейсмограмм, полученных на Земле. Наиболее характерная особенность лунных сейсмограмм — большая длительность сигнала, превосходящая часовые записи. Результаты моделирования показывают, что при наличии в среде ЗМС возникает сейсмический «звон», что приводит к значительному увеличению длительности записи сейсмического сигнала. Длительность сейсмического «звона» на Луне в первом приближении можно объяснить резонансными явлениями, возникающими в волновом поле при наличии тонкого низкоскоростного слоя (реголита).

Аналитический метод моделирования развит для сред сложного строения и структуры, включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и др. При анализе экспериментальных данных полевых работ в районе вулкана Шуго (Краснодарский край, Россия) была выяснена особенность волнового поля, связанная с появлением ряда резонансов в низкочастотном диапазоне частот. При этом резонанс монотонно смещается в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации, что не имеет наглядного физического объяснения. Это явление объяснено разномасштабными эффектами (кусковатостью) в рамках случайно-неоднородной среды.

Аналитический подход позволяет оценивать точность конечно-разностных методов. Сравнение аналитического и сеточного подходов позволило сделать количественные выводы о выборе шагов разностной схемы. Выяснено, что в сеточных методах для проведения «безартефактных» расчетов нужно брать не просто маленький шаг разностной схемы, но он еще должен пропорционально уменьшаться с увеличением пространственно-временных масштабов.

### 1. Постановка задачи моделирования

Математическая постановка задачи моделирования волновых полей формулируется в декартовой системе координат следующим образом: определить компоненты вектора смещения для неупругой анизотропной среды, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + f_x f(t), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + f_y f(t), \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + f_z f(t) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями при  $t = 0$

$$u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$$

и граничными данными при  $z = 0$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций (а они с компонентами вектора смещения) известными соотношениями, в которых анизотропные коэффициенты  $c_{ij}$  по принципу Вольтерра заменяются интегральными операторами  $C_{ij}$ , учитывающими влияние упругого последействия:

$$C_{ij}x \equiv c_{ij}x(t) - c_{ij}^1 \int_{-\infty}^t h_{ij}(t - \tau)x(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $c_{ij}^1$  — величины, определяющие уровень анизотропного поглощения. Функции последействия (ядра)  $h_{ij}(\xi)$  определяют спектральный состав поглощения. Среда  $(c_{ij}, c_{ij}^1, \rho)$  предполагается кусочно-постоянной по координате  $z$  (глубине). Для замкнутого описания анизотропного поглощения вводятся дополнительные физические параметры поглощения (декременты поглощения квазипродольных и квазипоперечных волн), которые определяются по величинам  $c_{ij}^1$  [1]. Компоненты вектора силы  $f_x, f_y, f_z$  описывают сосредоточенные и распределенные источники различного типа.

### 2. Аналитическое моделирование сейсмических волн

Аналитическое решение для наглядности приведено в случае распространения SH волн, когда источник расположен на свободной поверхности. Ограничимся рассмотрением ставшего классическим случая трансверсально-изотропной среды, когда ось симметрии совпадает с осью  $Oz$ . В этом случае задача определения вектора смещения в цилиндрической системе координат сводится к нахождению единственной отличной от нуля компоненты вектора смещения:

$$C_{66} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$C_{66} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \frac{\delta(r)}{r} f(t), \quad (5)$$

$$u_\varphi|_{t=0} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

На границах разрыва параметров ставятся известные условия сопряжения.

Для построения решения применяются известные преобразования Фурье — Бесселя по переменным  $(r, t)$  и в спектральной области  $(k, \omega)$  получается следующее двухпараметрическое семейство краевых задач в каждом слое:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \nu^2 w, \quad \frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} = f(\omega), \quad (7)$$

где  $\nu^2 = k^2 - \omega^2 \rho / \left( c_{66} - c_{66}^1 \int_0^T h_{66}(t) e^{-i\omega t} dt \right)$ .

Далее в рассмотрение вводятся две неизвестные функции  $x(z, k, \omega)$  и  $y(z, k, \omega)$  такие, что

$$\frac{dx}{dz} = \alpha(z)x, \quad \frac{dy}{dz} = -\beta(z)y, \quad (8)$$

и  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнению из (7). Тогда  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из уравнения Риккати:

$$\frac{d\alpha}{dz} + \alpha^2 = \nu^2, \quad \frac{d\beta}{dz} - \beta^2 = -\nu^2. \quad (9)$$

Предположим, что среда состоит из  $N$  слоев. Тогда в полупространстве имеем

$$\alpha = \beta|_{z>h_N} = \nu_{N+1}. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что функции  $x$  и  $y$  линейно независимы [2], откуда  $w = x + y$ . Из условия причинности поглощения и ограниченности решения следует, что  $x \equiv 0$  и  $\text{Re}(\nu) > 0$ .

Таким образом задача свелась к следующей: найти функцию  $y$  из системы уравнений

$$\frac{dy}{dz} = -\beta y, \quad \frac{d\beta}{dz} - \beta^2 = -\nu^2, \quad y|_{z=0} = -\frac{f}{\beta(0)}, \quad (11)$$

$$[\beta]|_{z=h_i} = 0, \quad \beta|_{z \geq h_N} = \nu_{N+1}. \quad (12)$$

Уравнение Риккати допускает аналитическое решение в каждом слое:

$$\beta(z) = \nu_i \frac{\beta_i + \nu_i \text{th}(\nu_i(h_i - z))}{\nu_i + \beta_i \text{th}(\nu_i(h_i - z))}. \quad (13)$$

При увеличении пространственно-временных масштабов при вычислении гиперболического тангенса в (13) происходит «переполнение» (выход за границу числового представления). Поэтому (13) записывается в эквивалентном виде:

$$\beta(z) = \nu_i \frac{\beta_i + \nu_i - (\nu_i - \beta_i) \exp(-2\nu_i(h_i - z))}{\beta_i + \nu_i + (\nu_i - \beta_i) \exp(-2\nu_i(h_i - z))}, \quad (14)$$

где  $\beta_i$  — значение  $\beta(z)$  на верхней границе  $i$ -го слоя. В итоге исходная краевая задача (7) сведена к двум задачам Коши, при этом одна из них нелинейная, что не приносит никаких трудностей, так как она допускает аналитическое решение (13).

Окончательно алгоритм состоит в следующем. Сначала пересчитывается значение  $\beta$  из полупространства на верхнюю границу слоя с индексом  $N$  (в данном случае они совпадают). Далее по (14) находится значение  $\beta$  на нижней границе  $(N - 1)$ -го слоя и пересчитывается на верхнюю границу  $(N - 1)$ -го слоя. Продолжая этот процесс  $N$  раз, определяем значение  $\beta(0)$ . Из (11) определяем  $y$  при  $z = 0$  и вместе с ним и  $w$ , решая тем самым задачу (7). Знание  $\beta(z)$  позволяет аналитически найти  $w$  в произвольной точке слоистой среды. После обратного преобразования Фурье — Бесселя определяется решение (4)–(6) для произвольных  $r, z, t$ .

Многочисленные экспериментальные наблюдения указывают на наличие поглощения и анизотропии различных типов. В [3] предложены четыре тонкослоистые модели трансверсально-изотропных сред, принадлежащие к различным типам. На рис. 1 приведены сейсмограммы вертикальной компоненты и индикатрисы квазипродольных и квазипоперечных лучевых скоростей для трансверсально-изотропной среды от источника типа «центр давления» с параметрами из [3]. Волновые поля выданы по окружности с шагом  $4.5^\circ$  для упругих (слева) и неупругих сред. Анизотропные декременты поглощения  $\Delta_{p\perp}, \Delta_{p\parallel}$  и  $\Delta_{s\perp}, \Delta_{s\parallel}$  выбраны равными. Видно, что каждой ветви лучевой индикатрисы в упругом и неупругом случаях соответствует определенная волна в полном поле. При этом, как показали численные эксперименты, угол раствора «петли» в упругом волновом поле квазипоперечных волн на  $8^\circ$ – $10^\circ$  больше угла раствора петли на лучевых индикатрисах соответствующих волн. Явление это относится к разряду «нелучевых».

Результаты моделирования показали, что введение поглощения не приводит к значительному уменьшению величины раствора «петли» при общем уменьшении «нелучевой» области. Происходит заметное изменение спектров в неупругом случае. Существенно изменяется и форма сейсмического импульса: он интегрируется. Как и в «просто» неупругой среде, происходит существенное перераспределение энергии и изменение спектрального состава квазипродольных и квазипоперечных волн. Вообще, влияние поглощения зависит от величины декремента, частоты и расстояния пройденного волной. Для низких частот и коротких дистанций потери на расхождение превышают потери на поглощение. С увеличением частоты и расстояний потери на поглощение растут и становятся преобладающими. Это относится как к изотропным, так и анизотропным средам. Без учета этого можно получить, например, неправильное определение кинематики.

В [1] подробно исследована волновая картина для четырех типов анизотропии из [3]. Существенным отличием волновой картины в анизотропных неупругих средах от анизотропных упругих является наличие аномальной дисперсии, которая приводит к возрастанию видимых периодов со временем регистрации.

Развитый аналитический метод моделирования позволяет рассматривать разнообразные прикладные задачи. Возможности аналитического метода позволили провести моделирование волнового сейсмического поля для модели упругой Луны, в которой имеется приповерхностная зона малых скоростей (реголит)

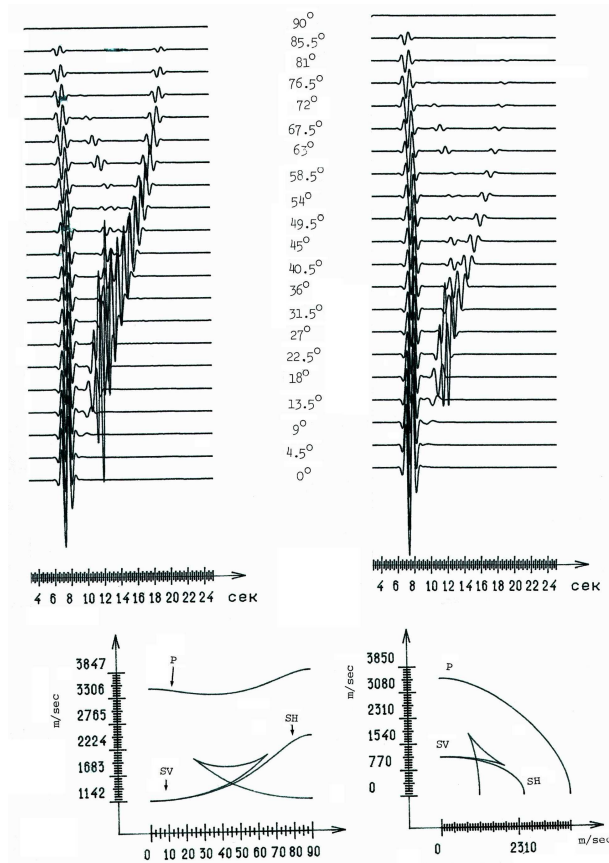


Рис. 1. Вертикальная компонента  $u_z$  и поляризационные диаграммы для анизотропной упругой (слева) и неупругой среды.

в случае значительных пространственно-временных масштабов (часовые записи экспериментальных данных). Моделирование проведено в рамках 3D плоско-слоистой среды.

Поскольку слой реголита очень тонкий, особое внимание уделялось точности расчетов. Отметим, что, например, в матричном методе и его модификациях при расчете волновых полей для высоких частот (тонких слоев) происходит потеря точности [4]. Сеточными методами также практически невозможен безартефактный расчет волновых полей в случае наличия тонкого слоя реголита. Моделирование волновых полей в этом случае, особенно на больших расстояниях, требует использования мелкого шага пространственной сетки, что приводит к колоссальному объему вычислительной работы.

На основе метода, развитого в [5, 6], создана компьютерная программа, позволяющая проводить моделирование волновых полей для значительных пространственно-временных масштабов, характерных для лунных экспериментальных данных. Аналитический метод моделирования, который применяется в настоящей статье, был разработан еще в 1990 г. Из-за малой мощности компьютеров тогда моделирование проводилось для пространственно-временных масштабов

порядка 50 длин волн. Здесь же расчеты проведены для десятков тысяч длин волн. Это потребовало модернизации метода. Для возможности проведения расчетов для значительных пространственно-временных масштабов на «обычных» компьютерах алгоритм модифицирован с целью исключения промежуточных массивов большой размерности, которые насчитываются аналитически в процессе расчета. В алгоритм также введена повышенная точность расчетов, проведено дополнительное тестирование и т. п.

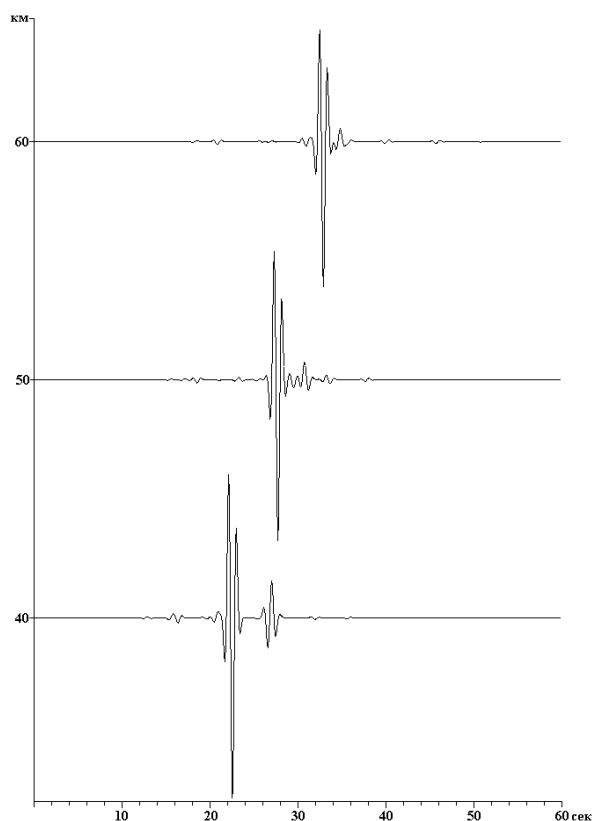


Рис. 2. Расчет минутной записи компоненты  $u_z$  для модели Луны без зоны малых скоростей (реголита). Приемники расположены на расстояниях 40, 50 и 60 км от источника.

В итоге, аналитический (не использующий сеток) подход позволил провести моделирование сейсмического «звона» на Луне без использования технологии высокопроизводительных вычислений на «обычных» компьютерах.

Схема численного эксперимента основывается на известных моделях Луны [7, 8]. Первая из используемых моделей — модель приповерхностной части Луны, в которой выделяется несколько маломощных слоев с низкими скоростями. Верхний слой в первой модели — реголит с мощностью в 10 м. Скорость продольных волн в реголите равна 100 м/сек, поперечных — 40 м/сек [7]. Вторая модель — глубинная модель, достигающая центра Луны и сложенная

многокилометровыми высокоскоростными слоями [8]. Используемая в расчетах модель Луны получена объединением данных моделей путем замены первого слоя глубинной модели [8] слоями модели [7]. Ниже приведены результаты моделирования для источника типа нормальной силы, расположенного на дневной поверхности, с доминирующей частотой входного сигнала в 1 Гц. Этот источник в первом приближении соответствует удару метеорита.

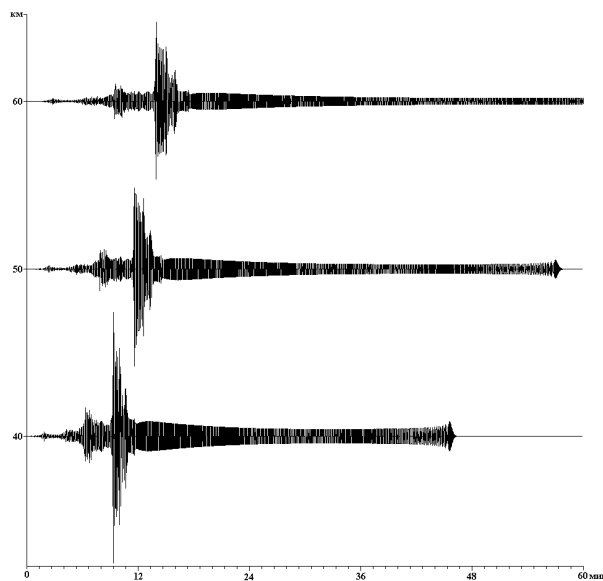


Рис. 3. Расчет часовой записи компоненты  $u_z$  для модели Луны с зоной малых скоростей (реголитом).

Приемники расположены на расстояниях 40, 50 и 60 км от источника.

Лунные сейсмограммы сильно отличаются от сейсмограмм, полученных на Земле. Наиболее характерная особенность лунных сейсмограмм — значительная длительность сейсмического сигнала, превосходящая часовые записи [7]. В [9] дается объяснение этой особенности лунных сейсмограмм. Предполагается, что «сейсмический звон» возникает за счет высокой степени неоднородности среды, приводящей к интенсивному рассеянию при очень низком поглощении сейсмической энергии в приповерхностном слое. Однако численного моделирования волнового поля в такой рассеивающей среде никем не проводилось.

Из рис. 2 следует, что для модели без реголита в течение одной минуты колебания затухают полностью, «звона» в этом случае нет. На рис. 3 приведен пример расчета для модели Луны с наличием зоны малых скоростей (реголитом). Как видно, «звон» в случае наличия реголита имеет значительную длительность, на больших удалениях превосходящую часовой интервал.

Результаты моделирования показывают существенную зависимость длительности «звона» от наличия тонкого низкоскоростного слоя, состоящего из реголита. Значительная длительность «звона» наблюдается при наличии тонкого реголитового слоя и в модели верхней части глубинного разреза Луны [7],



и в ее общей модели [8]. Если же брать модель Луны без тонкого слоя реголита (рис. 2), то волновое поле имеет длительность меньше минуты, «звона» не наблюдается. Результаты моделирования позволяют сделать следующий вывод. В первом приближении «сейсмический звон» на Луне может быть объяснен резонансными свойствами тонкого слоя без привлечения эффектов рассеяния, обусловленных высокой степенью неоднородности среды.

### 3. Расчет однократных волн без использования коэффициентов отражения и сравнение с лучевым методом

Существует большое число методов расчета волновых полей в слоистых средах. Все они имеют свою область применимости и могут рассчитывать только полное волновое поле без выделения из него отдельных типов волн. В то же время, в задачах моделирования волновых полей в сложно устроенных средах большое, а зачастую и определяющее значение имеют алгоритмы, позволяющие рассчитывать динамику отдельно взятых волн. В слоисто-неоднородных средах с большим числом слоев единственным методом численного анализа волнового поля по частям является асимптотический лучевой метод. Его применение, однако, имеет известные ограничения. Ниже рассматривается алгоритм расчета однократных и монотипных волн для слоисто-неоднородных сред с произвольным числом слоев на основе специальных разложений точных решений, не имеющий ограничений лучевого метода.

Для наглядности рассмотрим волновое уравнение для  $P$  волн. В этом случае решение в спектральной области после преобразований получено на свободной поверхности в следующем явном виде:

$$u(k, \omega) = -\frac{F(\omega)}{\nu_1} [1 - 2p_1 e^{-2\nu_1 h} - 2p_2 e^{-2(\nu_2 + \nu_1)h} (1 - p_1^2) - \dots], \quad (15)$$

где  $p_i = (\nu_{i+1} - \nu_i) / (\nu_{i+1} + \nu_i)$ .

Выясним физический смысл параметров в (15). Для большей наглядности рассмотрим случай плоских волн. В этом случае  $p_i = (c_i - c_{i+1}) / (c_i + c_{i+1})$ . Таким образом, (15) есть не что иное, как сферический аналог известного плоского представления однократно-отраженных волн [10].

В [11] развит алгоритм расчета однократных продольных и поперечных волн для упругих и неупругих сред. В [12] проведено сравнение аналитического и лучевого методов.

На рис. 4 приведен пример сравнения аналитического и лучевого методов для однократных продольных (РР) волн для двухслойной модели среды. Масштаб выбран одинаковым. Нормировка производилась по прямой волне. Видны отличия в амплитуде и фазе. При этом отличия есть не только в точке выхода головной волны, как считалось ранее. Отличия наблюдаются и в некоторой области, зависящей от длительности входного импульса. Полученные в [12] результаты показывают, что к известным геометрическим ограничениям лучевого метода добавляются еще и ограничения, связанные с длительностью входного импульса. Чем больше длительность импульса, тем в большей области будет неточно работать лучевой метод.

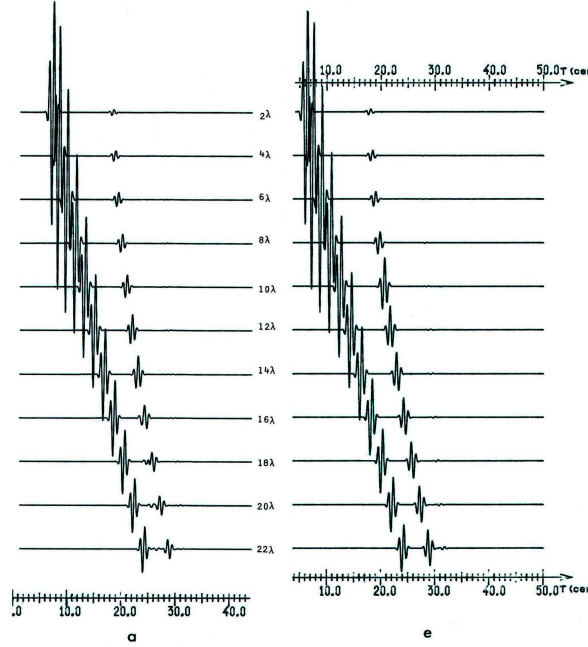


Рис. 4. Сравнение аналитического (а) и лучевого (е) методов для РР волн.

#### 4. Аналитическое моделирование волновых полей в средах сложной структуры

Неоднородная среда часто устроена так, что ее характерные размеры, например, по глубине меняются в широких пределах. Известно [13], что в этом случае практически невозможно рассматривать такую задачу в рамках детерминированного подхода. В любом случае использование детерминированных подходов требует значительно более сложных вычислений. Для построения модели разномасштабной неоднородности используется телеграфный случайный процесс  $\xi(z) = a(-1)^{n(0,z)}$  [14], где  $n(z_1, z_2)$  — случайная последовательность целых чисел, описывающая количество скачков на интервале  $(z_1, z_2)$ . Вероятность выпадения  $n$  точек на интервале  $(z_1, z_2)$  определяется формулой Пуассона:

$$P_{n(z_1, z_2)=n} = \frac{\langle n(z_1, z_2) \rangle^n}{n!} e^{-\langle n(z_1, z_2) \rangle},$$

где  $\langle n(z_1, z_2) \rangle = \nu |z_2 - z_1|$  — среднее значение точек на интервале  $(z_1, z_2)$ , а  $\nu$  — среднее число точек, приходящихся на единицу расстояния. Длина интервала между соседними скачками при этом имеет экспоненциальное распределение.

Построение уравнения для разномасштабной среды иллюстрируется на примере волнового уравнения продольных волн в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (16)$$

После преобразования Фурье — Бесселя уравнение (16) будет выглядеть следу-

ющим известным образом (несущественные индексы опущены):

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = k^2 u - \frac{\omega^2}{c^2} u = \nu_p^2 u. \quad (17)$$

Для рассмотрения разномасштабной среды в (17) используем телеграфный случайный процесс  $\xi(z)$ :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = k^2 u - \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \xi(z)] u \quad (18)$$

Решение уравнения (18) как некий функционал от  $\xi(z)$  уже имеет случайный характер. Применительно к практическим приложениям рассмотрим среднее значение флуктуирующего поля  $\langle u \rangle$ . В [15] получено точное замкнутое уравнение для среднего значения поля:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \langle u \rangle}{dz^4} + 4\nu \frac{d^3 \langle u \rangle}{dz^3} + \left( 4\nu^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \nu_p^2 \right) \frac{d^2 \langle u \rangle}{dz^2} \\ - 4\nu \nu_p^2 \frac{d \langle u \rangle}{dz} - \left( \frac{\omega^4}{c^4} a^4 + 4\nu^2 \nu_p^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \nu_p^2 \right) \langle u \rangle = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Таким образом, вместо «обычного» волнового уравнения второго порядка (17) в случае случайно-неоднородной среды получается уравнение четвертого порядка для среднего значения поля. К уравнению (19) добавляются соответствующие краевые условия для среднего значения поля [16]. В (19) параметр  $a$  определяет величину разномасштабности неоднородности, а  $r_0 = 1/2\nu$  — характерный размер неоднородности (кусковатости) среды. Отметим, что параметры  $a$  и  $r_0$  могут быть произвольными величинами. В [16] разработан аналитический метод расчета разномасштабных волн.

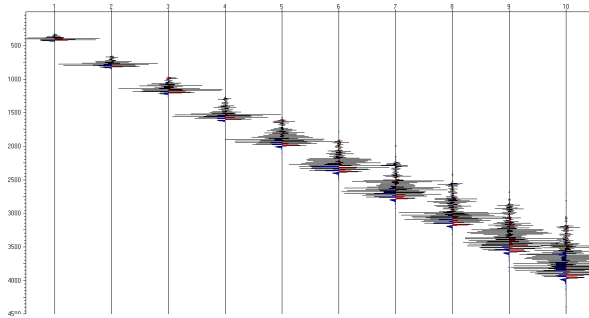


Рис. 5. Волновое поле на дневной поверхности для разномасштабной неоднородной среды. Характерный размер неоднородности  $\lambda/16$ .

На рис. 5 приведены волновые поля для значительного удаления системы источник-приемник с большой разномасштабностью неоднородности. Выдача производится на свободной поверхности. Характерный размер неоднородности  $r_0 = \lambda/16$  ( $\lambda$  — длина волны). Первый приемник расположен на расстоянии 30 $\lambda$  от источника, последний — 300 $\lambda$ . Как видно из рис. 5, на малых расстояниях эффекты разномасштабности значительно меньше, чем на больших. С

удалением приемника от источника волновая картина существенно изменяется. Энергия существенно перераспределяется в область низких частот.

При анализе экспериментальных данных полевых работ в районе вулкана Шуго (Краснодарский край, Россия) была выяснена особенность волнового поля, связанная с появлением ряда резонансов в низкочастотном диапазоне частот. При этом резонанс монотонно смещается в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации [17], что не имеет наглядного физического объяснения. Это явление может быть просто объяснено разномасштабными эффектами (кусковатостью) среды. Как видно из рис. 5, частота разномасштабной волны монотонно убывает с ростом расстояния. Это полностью объясняет эффект монотонного уменьшения частоты с ростом расстояния, обнаруженный при практических наблюдениях.

Аналитический метод моделирования разработан для широкого круга геофизических сред, включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т. д. Источники при описании сейсмических, сейсмологических и вибрационных процессов могут быть сосредоточенными и распределенными [18]. Поскольку решение дается аналитическими выражениями, расчеты на сверхдальние расстояния можно проводить на «обычных» компьютерах без использования технологии высокопроизводительных вычислений.

Кроме того, аналитический метод может служить для количественного контроля точности конечно-разностных методов. В [19] проведено сравнение аналитического и сеточного методов. Там выяснено, что в сеточных методах для проведения безартефактных расчетов нужно брать не просто маленький шаг разностной схемы, но он еще должен пропорционально уменьшаться с ростом времени записи (увеличением пространственно-временных масштабов).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фатьянов А. Г. Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии. Новосибирск, 1989. 44 с. (Препринт/ВЦ; № 857).
2. Фатьянов А. Г., Михайленко Б. Г. Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 4. С. 834–839.
3. Невский М. В. Квазианизотропия скоростей сейсмических волн. М.: Наука, 1974.
4. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984.
5. Фатьянов А. Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 2. С. 323–327.
6. Фатьянов А. Г. Математическое моделирование волновых полей в средах с криволинейными границами // Докл. АН. 2005. Т. 401, № 4. С. 529–532.
7. Галкин И. Н., Шварев В. В. Строение Луны. М.: Знание, 1977.
8. Nakamura Y., Dorman J., Duennebier F., Lammlein D., Latham G. Shallow lunar structure determined from the passive seismic experiment // Moon. 1975. V. 13. P. 57–66.
9. Latham G., Ewing M., Press F., Sutton G., Dorman J., Nakamura Y., Toksoz N., Wiggins R., Derr J., Duennebier F. Apollo 11 passive seismic experiment // Geochim. Cosmochim. Acta. 1970. V. 34. Suppl. 1. P. 2309–2320.
10. Козлов Е. А. Распознавание и подавление многократных волн в сейсморазведке. М.: Недра, 1982.
11. Fatyanov A. G., Mikhailenko B. G. Numerically-analytical method for calculation of theoretical seismograms in layered-inhomogeneous inelastic media // Geophysical data inversion methods and applications, free. Berlin: Univ. Berlin, 1989. P. 499–530.

12. Алексеева М. В. Математическое моделирование сейсмического поля в многослойной упругой среде (в рамках лучевого метода). Новосибирск, 1987. 60 с. (Препринт/ВЦ; № 729).
13. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983.
14. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
15. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск: Наука, 1983.
16. Алексеев А. С., Глинский Б. М., Ковалевский В. В., Фатьянов А. Г. и др. Методы решения прямых и обратных задач сейсмологии, электромагнетизма и экспериментальные исследования в проблемах изучения геодинамических процессов в коре и верхней мантии Земли. : Изд-во СО РАН, 2010.
17. Глинский Б. М., Собисевич А. Л., Фатьянов А. Г., Хайретдинов М. С. Математическое моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана Шуго // Вулканология и сейсмология. 2008. № 5. С. 69–77.
18. Фатьянов А. Г. Прямые и обратные задачи для тензора сейсмического момента в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 6. С. 1357–1361.
19. Fatyanov A. G., Terekhov A. V. High-performance modeling acoustic and elastic waves using the Parallel Dichotomy Algorithm // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 1992–2003.

*Статья поступила 3 сентября 2015 г.*

Фатьянов Алексей Геннадьевич  
Институт вычислительной математики и математической геофизики,  
пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090  
`fat@nmsf.sscs.ru`