

Глава 3

Некоторые математические модели волновых процессов в активной сейсмологии

Обсуждаются подходы к совершенствованию математических моделей сейсмологии для сложнопостроенных сред на основе численных методов решения прямых и обратных задач теории распространения упругих волн. Используется схема замкнутых циклов моделирования, основанная на последовательном решении серии возникающих взаимосвязанных прямых и обратных задач.

Учитывая недостаточное обеспечение геофизики в России высокопроизводительной вычислительной техникой, делается упор на развитие численно-аналитических алгоритмов, допускающих экономичный счет и эффективное распараллеливание. Практические технологии обработки данных учитывают, в основном, лишь акустические свойства геологической среды. Они используют широко распространенные методы обработки, основанные на модели волнового уравнения и кинематики волн. Этой модели в основном достаточно для интерпретации отраженных продольных волн, наблюдаемых вблизи от источников в средах с достаточно плавным изменением свойств по горизонтали (методы типа общей глубинной точки (ОГТ)). Широкие масштабы применения такого приближения формируют упрощенное представление о сейсмических свойствах среды и часто приводят к серьезным ошибкам. Это определяет актуальность развития реалистичных моделей геологических сред, учитывающих свойство их упругости.

3.1. Введение

Физическая идея, на которой основываются сейсмические методы исследования строения Земли и геодинамических процессов в ней, состоит в предположении существования взаимно однозначной количественной связи между внутренним механическим строением Земли и полем колебаний точек ее поверхности (или некоторых других совокупностей точек) при известных источниках колебания и начальном режиме колебаний.

При заданной модели строения изучаемой области среды возникает *прямая задача моделирования* о прогнозе режима колебаний в последующие моменты времени. В задачах синтеза математической модели среды, совместимой с известными из реальных наблюдений элементами волнового поля, возникают *обратные задачи теории распространения волн*.

Эффективное решение задач этих двух типов составляет основное содержание математического моделирования волновых процессов в сейсмологии, сейсморазведке и акустике.

На практике прямые и обратные задачи возникают обычно не изолированно, а в некоторой совокупности, позволяющей как объяснить отдельные стороны физических закономерностей распространения волн, так и обеспечить количественную идентификацию и синтез изучаемого геофизического объекта или процесса.

Следует иметь в виду методологические различия между прямыми и обратными задачами. В прямых задачах все функциональные элементы имеют модельный смысл и как бы принадлежат “идеализированному миру моделей”. В обратных задачах математические уравнения процесса также имеют идеализированный, модельный характер, но исходные данные определяются числовыми массивами реальных измерений, т. е. принадлежат “реальному миру”. Таким образом, в обратных задачах одновременно присутствуют элементы из “разных миров”. Это определяет более сложный математический характер обратных задач. Они не всегда разрешимы (если реальные и модельные элементы не соответствуют друг другу) или не имеют единственного или устойчивого решения (если количество исходной информации, полученной при реальных измерениях, недостаточно).

Дефицит представительных реальных данных в сейсморазведке (из-за преобладания схем наблюдения отраженных волн вблизи пункта возбуждения) и в сейсмологии (из-за малого числа точек регистрации и неопределенности положения очагов) побуждает искать дополнительную информацию об изучаемом объекте. Такую информацию могут предоставлять другие геофизические методы, в том числе методы потенциальных полей, хотя они в индивидуальной постановке для сложных моделей сред не дают единственных решений. Синтез сейсмической модели возможен разными геофизическими методами, поскольку достоверность построенной модели должна проверяться с помощью прямой задачи и соответствия ее решения всей имеющейся информации. В п. 3.3.4 будут приведены примеры междисциплинарных (совмещенных) обратных задач геофизики, дополнительных к сейсмическим задачам.

Для того чтобы сформировать замкнутый интерактивный цикл математического моделирования реального процесса, нужно не только создать алгоритмы решения прямых и обратных задач, но и обеспечить погружение реальных данных во множество разрешимости обратной задачи путем фильтрации помех измерения. Все эти процедуры кроме создания чисто математических алгоритмов требуют физического анализа и выбора соответствующей методики математического моделирования.

Как в теории, так и в численных методах решения прямых и обратных задач возникающие трудности в большей степени связаны не с типом конкретных уравнений физических процессов или систем (акустика, электромагнетизм, сейсмика), а с их размерностью, функциональными свойствами коэффициентов и граничных поверхностей, характеризующих строение среды.

Поэтому основные идеи в исследовании задач теории распространения и подходы к разработке численных методов их решения обычно апробируют на типичной и достаточно представительной модели уравнений этого класса – на волновом уравнении соответствующей размерности и пространственной изменчивости скорости распространения волн.

Однако, как показывает опыт моделирования волновых полей в нефтяной сейсморазведке, пренебрегать физическими особенностями конкретных волновых процессов весьма опасно. Необходимо, в частности, учитывать упругость среды

и существование двух типов волн (продольных и поперечных). Многие практические методы в сейсмологии и сейсморазведке основываются на приближенном решении только волнового уравнения. Это может приводить, как показано ниже, к существенным ошибкам. Примеры подобных ошибок имеются в геофизической литературе, в которой рассматриваются случаи интерпретации сейсмических данных ОГТ, вертикального сейсмического профилирования (ВСП), корреляционного метода преломленных волн (КМПВ) и глубинного сейсмического зондирования (ГСЗ) в средах с сильно наклоненными границами или с большими горизонтальными градиентами скоростей. В задачах сейсмического мониторинга дилатантных зон в сейсмологии и разрабатываемых месторождений нефти в сейсморазведке особенно четко видна ограниченность акустической модели сейсмических процессов. Продольные волны не реагируют на факт флюидонасыщенности нефтесодержащих пластов, так как эти пласты, толщина которых обычно много меньше длины волны, вовлекаются в процесс колебаний как целый массив. Поперечные и обменные волны, напротив, чутко реагируют на степень флюидонасыщенности пластов. Отраженные обменные и поперечные волны имеют в этих случаях существенные амплитуды в широком диапазоне частот.

Наиболее естественными численными методами исследования трехмерных задач динамической теории упругости представляются конечно-разностные методы и методы типа конечных элементов. Однако в геофизике, где большинство задач рассматривается в весьма протяженных пространственных областях со сложными границами, в среде с сильно изменяющимися свойствами, где к тому же стремятся использовать высокочастотные компоненты волновых полей, применимость методов конечных разностей и конечных элементов ограничивается недостаточной мощностью современных ЭВМ и жесткими условиями сходимости методов.

Дополнительные трудности при решении прямых и обратных задач распространения волн в сложных средах испытывают математики и геофизики России из-за отсутствия достаточно производительных компьютеров. Необходимость решать практические задачи с нужной точностью в конкурентной ситуации приводит к проблеме создания высокопроизводительных алгоритмов, допускающих эффективное распараллеливание на многопроцессорных вычислительных системах. (Положение с производительностью ЭВМ начало улучшаться лишь в последние годы.)

Указанные трудности удалось преодолеть благодаря численно-аналитическим методам, основанным на комбинировании различных интегральных преобразований с методами конечных разностей и конечных элементов. Это позволяет использовать весьма быстрые алгоритмы решения большого числа прямых динамических задач для применения метода минимизации функционалов при решении обратных задач. Обратные задачи синтезируют модель среды, соответствующую наблюдаемой на практике информации. Однако в чистом виде синтез удается пока лишь в довольно узком классе моделей из-за слабой устойчивости методов решения обратных задач.

В главе излагаются численные методы решения прямых и обратных задач теории распространения упругих волн. Теоретические вопросы обоснования этих

методов не являются целью настоящей главы. Основное внимание уделено алгоритмам и вычислительным экспериментам.

3.2. Прямые задачи моделирования волновых сейсмических процессов

3.2.1. Обзор методов расчета сейсмических волновых полей

В настоящее время существует большое количество различных методов решения прямых динамических задач сейсмологии. Одним из наиболее популярных является лучевой метод, предложенный в [10, 5, 48], впоследствии развитый в [241, 240, 259]. Лучевой метод с учетом нулевого члена лучевого ряда требует значительно меньше вычислительных затрат, чем другие методы. Кроме того, с помощью лучевого метода можно легко учесть вклад тех или иных сейсмических волн в формировании сложного волнового поля. Однако с развитием высокоточной широкополосной сейсмологической аппаратуры появились факты регистрации “нелучевых” сейсмических волн, которые не описываются нулевым членом лучевого ряда, и для их вычисления необходимо учесть последующие члены ряда. В работах [28, 260] такие “нелучевые” волны были обнаружены с помощью численно-аналитических методов моделирования сейсмических полей.

В начале 60-х годов с появлением высокопроизводительных ЭВМ в геофизике стали использоваться численные методы расчета волновых полей, например методы конечных разностей и конечных элементов. Возникло новое направление – вычислительная геофизика. Первые результаты применения численных методов в сейсмологии показали, что для получения приемлемых по точности результатов при численной дискретизации необходимо 15–20 точек на минимальную длину волны для расчета волновых полей на расстоянии 80–100 длин волн (см. [228, 229, 234, 262, 263]). Такие требования оказались неприемлемыми для существовавших в то время ЭВМ по вычислительным затратам и оперативной памяти даже при решении двумерных задач сейсмологии и сейсморазведки.

В начале 70-х годов в Вычислительном центре СО РАН (впоследствии институт Вычислительной математики и математической геофизики) стали развиваться численно-аналитические методы решения задач сейсмологии, основанные на расщеплении двумерных и трехмерных задач на серию независимых одномерных с помощью интегральных преобразований по горизонтальным координатам и с последующим решением их конечно-разностным методом [29–31, 126, 122, 227]. Такой подход не требовал большой оперативной памяти, обладал хорошей точностью и был реализован на отечественных ЭВМ типа БЭСМ-6 для различных моделей сред: для радиально-неоднородных – в [30], для анизотропных – в [116, 283], для вязкоупругих сред – в [185–187]. Обобщение вышеуказанного подхода для двумерных и трехмерных моделей сред дано в работах [123–125, 291, 290, 287].

Низкая точность и большие вычислительные затраты при расчете сейсмических волновых полей на большие расстояния стандартными численными методами дали толчок к развитию за рубежом конечно-разностных методов с высоким порядком аппроксимации [232, 244, 258, 277]. Кроме того, получили развитие псевдоспектральные методы решения задач сейсмологии, см. [272–274]. Если в

конечно-разностных методах производные аппроксимируются конечно-разностным отношением в дискретных точках физического пространства, то в псевдоспектральных они определяются на основе разложения в ряды по базисным функциям, которые бесконечное число раз дифференцируемы во всей расчетной области. Обычно в качестве таких базисных функций выбираются тригонометрические функции либо полиномы Чебышева [254], так как для них существуют эффективные методы быстрого преобразования Фурье (БПФ). Важным достоинством псевдоспектральных методов является высокая скорость сходимости (теоретически экспоненциальная), если решение обладает достаточной степенью гладкости.

Аналогичной точностью обладают и спектральные методы, предложенные ранее для решения задач сейсмологии в [123–125, 290, 287]. В отличие от псевдоспектральных методов в спектральном подходе все вычисления проводятся в спектральном пространстве без возвращения в каждый момент времени в физическое пространство. Основное время расчета в этом случае идет на определение сумм типа свертки, которые вычисляются с помощью БПФ или на спецпроцессорах. Сочетание спектрального подхода по горизонтальным координатам и высокоточными разностными схемами с переменным шагом по вертикальной координате и явной разностной схемой по времени оказалось эффективным для решения многих задач сейсморазведки и сейсмологии, см. [125, 288].

Все вышеуказанные методы расчета сейсмических волновых полей основаны на использовании явной разностной схемы второго порядка по времени и условно называются методами расчета во временной области. Дальнейшее развитие этих методов связано с попытками использовать более высокий порядок аппроксимации производных по времени. Действительно, спектральный и псевдоспектральный методы дают очень высокий порядок аппроксимации пространственных производных, а накопление ошибки при расчете волновых полей на больших расстояниях и временах распространения происходит преимущественно за счет второго порядка аппроксимации временных производных. Попытки использовать четвертый порядок аппроксимации по времени наталкиваются на большие ограничения на шаг по времени для того, чтобы схема была устойчивой. В работе [301] предложено использовать спектральный подход на основе полиномов Чебышева для аппроксимации временного оператора. Метод обеспечивает высокую точность, но требует больших вычислительных затрат.

В работах [101, 268, 269] предложен спектрально-разностный алгоритм сведения задачи распространения сейсмических волн в неоднородных средах к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Используя метод матричной декомпозиции, система расщепляется на N независимых обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решаются аналитически. Поскольку декомпозиция (диагонализация) не зависит от пространственного расположения источника, который задается в правой части системы, эта трудоемкая процедура проводится только один раз для любого положения источника. Таким образом, отпадает необходимость решать задачу каждый раз при изменении положения источника. Такой подход является весьма эффективным при моделировании сейсмических волновых полей в сейсморазведке методом ОГТ,

когда необходимо решать задачу для фиксированного строения среды, но при различных (несколько сотен) положениях источника.

Вторая большая группа методов расчета сейсмических волновых полей основана на различных подходах в частотной области. После применения преобразования Фурье по времени мы получаем уравнения или систему уравнений Гельмгольца. Эти уравнения необходимо решить для набора временных частот, количество которых зависит от ширины спектра сигнала в источнике, затем эти решения просуммировать, чтобы получить импульсную сейсмограмму. Наиболее известными методами решения в частотной области является метод Томсона–Хаскелла [253, 302], в дальнейшем развитый в [128], а также “рефлективный” метод [247, 295]. В работе [185] предложен полуаналитический алгоритм, основанный на использовании преобразования Фурье–Бесселя по горизонтальной координате и введении новых функций, которые сводят решение редуцированной задачи к решению системы уравнений Рикатти. В каждом однородном слое решение представляется аналитически в виде комбинации экспонент только с отрицательным знаком. Простые формулы пересчета волнового поля с одного слоя на другой выводятся на основе граничных условий.

Большое число работ посвящено численным методам решения уравнений типа Гельмгольца (см., например, [279, 281, 282]). Заметим, что численные методы расчета сейсмических волновых полей в частотной области имеют свои особенности. По сравнению с методами расчета во временной области здесь нет ограничений на шаг по времени, в то время как во временной области он определяется максимальным перепадом скорости распространения сейсмических волн в выбранной модели среды. Кроме того, при решении прямых динамических задач во временной области для неупругих сред с последствием возникают проблемы, связанные с наличием в уравнениях интегралов типа свертки. Эти трудности преодолеваются путем аппроксимации интегралов конечной суммой и введением дополнительной переменной [239, 299], что приводит к существенному увеличению вычислительных затрат, в то время как в частотной области эти проблемы легко преодолеваются введением комплексных упругих параметров.

Остановимся на особенностях численного решения прямых динамических задач в частотной области. После применения преобразования Фурье по времени и аппроксимации пространственных производных, например, конечно-разностным методом либо методом конечных элементов, задача сводится к системе алгебраических уравнений большой размерности. Так как матрица этой системы зависит от временной частоты, то при решении системы ее нужно трансформировать для каждой частоты, что представляет чрезвычайно трудоемкую процедуру. Чтобы уменьшить вычислительные затраты, используют конечно-разностную аппроксимацию пространственных производных высокого порядка точности. При этом размерность матрицы уменьшается, но растет количество ненулевых ее диагоналей. В последние годы прогресс в этой области связан с применением высокоточных компактных разностных схем, с использованием которых уменьшается размерность матрицы, но не происходит увеличения ненулевых диагоналей [261, 300].

Кардинальное решение вышеуказанной проблемы связано с применением интегрального преобразования Лагерра по времени вместо преобразования Фурье. Такой подход предложен в [100, 289].

В отличие от преобразования Фурье применение интегрального преобразования Лагерра по времени с последующей дискретизацией пространственных переменных позволяет свести исходную задачу к решению алгебраической системы уравнений, в которой параметр разделения m присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Матрица такой системы не зависит от параметра разделения, что позволяет нам воспользоваться быстрыми алгоритмами решения систем линейных алгебраических уравнений для множества правых частей, например, на основе разложений по методу Холецкого. Сравнивая интегральные преобразования Фурье и Лагерра, можно сказать, что применение преобразования Лагерра в сейсмических задачах позволяет на порядок сократить вычислительные затраты.

В настоящей работе мы проиллюстрируем применение интегрального преобразования Лагерра на простых примерах для систем уравнений первого и второго порядка по времени. С этой целью рассмотрим задачу о распространении сейсмических волн в вертикально-неоднородном полупространстве в скоростях и напряжениях и задачу о распространении акустических волн в двумерно-неоднородных средах.

В настоящее время вышеуказанный подход развит для упругих [270], вязкоупругих [271, 292], анизотропных [284], а также для радиально-неоднородных сред [293].

3.2.2. Интегральное преобразование Лагерра

Введем обобщенное интегральное преобразование Лагерра вида

$$F_m = \int_0^{\infty} F(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^{\alpha}(ht) d(ht) \quad (3.1)$$

с формулами обращения

$$F(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} F_m l_m^{\alpha}(ht), \quad (3.2)$$

где $l_m^{\alpha}(ht)$ – ортонормированные функции Лагерра:

$$\int_0^{\infty} l_m^{\alpha}(ht) l_n^{\alpha}(ht) d(ht) = \delta_{mn} \frac{(m+\alpha)!}{m!}. \quad (3.3)$$

Функции Лагерра $l_m^{\alpha}(ht)$ выражаются через классические стандартизованные многочлены Лагерра $L_m^{\alpha}(ht)$ [182]. Здесь мы выбираем параметр α целым и положительным, тогда

$$I_m^\alpha(ht) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{ht}{2}} L_m^\alpha(ht). \quad (3.4)$$

В формулах (3.1)–(3.4) $m = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того, введен новый параметр сдвига $h > 0$, смысл и эффективность применения которого обсуждается ниже. В дальнейшем для обоснования справедливости применения разложения (3.1), (3.2) в сейсмических задачах мы будем предполагать необходимую гладкость всех функций, а также некоторые ограничения на их поведение в 0 и на ∞ [182].

В дальнейшем нам понадобятся выражения для первой и второй производных полиномов Лагерра по переменной t . Используя определение полиномов Лагерра, можно получить следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_m^\alpha(ht) = -h \sum_{k=0}^{m-1} L_k^\alpha(ht), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_m^\alpha(ht) = h^2 \sum_{k=0}^{m-2} (m-k-1) L_k^\alpha(ht). \quad (3.5)$$

3.2.3. Применение интегрального преобразования Лагерра для системы уравнений теории упругости первого порядка

Рассмотрим применение интегрального преобразования Лагерра [100, 289] для аппроксимации производных по времени. Для аппроксимации производных по пространственным переменным возможно использование конечно-разностных методов высокого порядка точности, спектральных методов или их комбинаций [125, 290, 287, 288]. Здесь мы воспользуемся комбинацией конечных интегральных косинус-, синус-преобразований Фурье по одной пространственной координате с конечно-разностной аппроксимацией по второй пространственной координате. Данные преобразования позволяют свести рассматриваемую задачу к одномерной, решение которой может быть получено численно.

Распространение сейсмоакустических колебаний в упругой среде в декартовой системе координат (x, z) для скоростей и напряжений записывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + F_x(x, z) f(t), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + F_z(x, z) f(t), \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (3.6)$$

В этих уравнениях (u_x, u_z) – компоненты скорости смещения, $(\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$ – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность среды, λ и μ – коэффициенты Ламе. При этом F_x, F_z – составляющие силы $\vec{F}(x, z) = F_x \vec{e}_x + F_z \vec{e}_z$, описывающие распределение локализованного в пространстве источника, например, типа

функции Дирака. Тогда в зависимости от типа моделируемого источника они будут иметь следующие значения:

- 1) $F_x = 0, F_z = \delta(x - x_0)\delta(z - z_0)$ – для источника вертикальной силы;
- 2) $F_x = \frac{\partial(x - x_0)}{\partial x}\delta(z - z_0), F_z = \delta(x - x_0)\frac{\partial(z - z_0)}{\partial z}$ – для центра давления.

Функция $f(t)$ является временным сигналом в источнике с координатами (x_0, z_0) . Задача решается при нулевых начальных данных

$$u_x|_{t=0} = u_z|_{t=0} = \sigma_{xx}|_{t=0} = \sigma_{zz}|_{t=0} = \sigma_{xz}|_{t=0} = 0 \quad (3.7)$$

и с граничными условиями на свободной поверхности

$$\sigma_{xz}(x, z, t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(x, z, t)|_{z=0} = 0. \quad (3.8)$$

Полагаем среду вертикально-неоднородной, т. е. $\rho(z), \lambda(z), \mu(z)$ – кусочно-непрерывные функции переменной z . Предполагаем, что функции $u_x(x, z, t), u_z(x, z, t), \sigma_{xx}(x, z, t), \sigma_{zz}(x, z, t), \sigma_{xz}(x, z, t)$ обладают достаточной гладкостью для применения последующих преобразований.

Воспользуемся конечными интегральными косинус-, синус-преобразованиями Фурье для каждой компоненты системы (3.6):

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x(n, z, t) \\ \hat{u}_z(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{xx}(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{zz}(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{xz}(n, z, t) \end{pmatrix} = \int_0^\infty \begin{pmatrix} u_x(x, z, t) \sin(k_n x) \\ u_z(x, z, t) \cos(k_n x) \\ \sigma_{xx}(x, z, t) \cos(k_n x) \\ \sigma_{zz}(x, z, t) \cos(k_n x) \\ \sigma_{xz}(x, z, t) \sin(k_n x) \end{pmatrix} dx, \quad (3.9)$$

где $k_n = \frac{n\pi}{a}$. Соответствующие формулы обращения имеют вид

$$\begin{pmatrix} u_x(x, z, t) \\ u_z(x, z, t) \\ \sigma_{xx}(x, z, t) \\ \sigma_{zz}(x, z, t) \\ \sigma_{xz}(x, z, t) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^\infty d_n \begin{pmatrix} \hat{u}_x(n, z, t) \sin(k_n x) \\ \hat{u}_z(n, z, t) \cos(k_n x) \\ \hat{\sigma}_{xx}(n, z, t) \cos(k_n x) \\ \hat{\sigma}_{zz}(n, z, t) \cos(k_n x) \\ \hat{\sigma}_{xz}(n, z, t) \sin(k_n x) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

где

$$d_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{при } n = 0, \\ \frac{2}{\pi} & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

Система уравнений, полученная после преобразований (3.9), (3.10), содержит члены $u_x|_{x=0}, \frac{\partial u_z}{\partial x}|_{x=0}, \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}|_{x=0}, \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x}|_{x=0}, \sigma_{xz}|_{x=0}$. Введем дополнительные граничные условия, полагая эти члены на границах $x = 0$ и $x = a$ равными нулю. Будем рассматривать волновое поле до момента $t < T$, где T – минимальное время распространения переднего фронта волны до отражающих поверхностей $x = 0, x = a$. Тогда новая редуцированная задача запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{xz}}{\partial z} - k_n \hat{\sigma}_{xx} \right) + F_x(n, z) f(t), \\ \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{zz}}{\partial z} + k_n \hat{\sigma}_{xz} \right) + F_z(n, z) f(t), \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{xx}}{\partial t} = k_n (\lambda + 2\mu) \hat{u}_x + \lambda \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z} + k_n \lambda \hat{u}_x, \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} - k_n \hat{u}_z \right). \end{cases} \quad (3.11)$$

Здесь

$$F_x(n, z) = \int_0^a F_x(x, z) \sin(k_n x) dx, \quad F_z(n, z) = \int_0^a F_z(x, z) \cos(k_n x) dx.$$

Система уравнений (3.11) решается при нулевых начальных данных и граничных условиях

$$\hat{\sigma}_{xz}(n, z, t)|_{z=0} = \hat{\sigma}_{zz}(n, z, t)|_{z=0} = 0. \quad (3.12)$$

Теперь применим к задаче (3.11), (3.12) интегральные преобразования Лагерра

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x^m(n, z) \\ \hat{u}_z^m(n, z) \\ \hat{\sigma}_{xx}^m(n, z) \\ \hat{\sigma}_{zz}^m(n, z) \\ \hat{\sigma}_{xz}^m(n, z) \end{pmatrix} = \int_0^\infty (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) \begin{pmatrix} \hat{u}_x(n, z, t) \\ \hat{u}_z(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{xx}(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{zz}(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{xz}(n, z, t) \end{pmatrix} d(ht) \quad (3.13)$$

с соответствующими формулами обращения

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x(n, z, t) \\ \hat{u}_z(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{xx}(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{zz}(n, z, t) \\ \hat{\sigma}_{xz}(n, z, t) \end{pmatrix} = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \begin{pmatrix} \hat{u}_x^m(n, z) \\ \hat{u}_z^m(n, z) \\ \hat{\sigma}_{xx}^m(n, z) \\ \hat{\sigma}_{zz}^m(n, z) \\ \hat{\sigma}_{xz}^m(n, z) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Из формул обращения (3.14) видно, что для удовлетворения начальных условий задачи значение параметра (порядок функции Лагерра) $\alpha \geq 1$. О выборе параметра α и его влиянии на численную реализацию алгоритма будет сказано ниже.

После применения преобразований (3.13), (3.14) система уравнений (3.11) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{h}{2} \hat{\sigma}_{zz}^m - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{u}_z^m}{\partial z} - k_n \lambda \hat{u}_x^m = f_1^{m-1}(n, z), \\ \frac{h}{2} \hat{\sigma}_{xx}^m - \lambda \frac{\partial \hat{u}_z^m}{\partial z} - k_n (\lambda + 2\mu) \hat{u}_x^m = f_2^{m-1}(n, z), \\ \frac{h}{2} \hat{u}_x^m - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{xz}^m}{\partial z} - k_n \hat{\sigma}_{xx}^m \right) = f_3^{m-1}(n, z), \\ \frac{h}{2} \hat{u}_z^m - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{zz}^m}{\partial z} + k_n \hat{\sigma}_{xz}^m \right) = f_4^{m-1}(n, z), \\ \frac{h}{2} \hat{\sigma}_{xz}^m - \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_x^m}{\partial z} - k_n \hat{u}_z^m \right) = f_5^{m-1}(n, z), \end{cases} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} f_1^{m-1}(n, z) &= -h \sum_{j=0}^{m-1} \hat{\sigma}_{zz}^j, & f_2^{m-1}(n, z) &= -h \sum_{j=0}^{m-1} \hat{\sigma}_{xx}^j, \\ f_3^{m-1}(n, z) &= -h \sum_{j=0}^{m-1} \hat{u}_x^j + F_x(n, z) f^m, & f_4^{m-1}(n, z) &= -h \sum_{j=0}^{m-1} \hat{u}_z^j + F_z(n, z) f^m, \\ f_5^{m-1}(n, z) &= -h \sum_{j=0}^{m-1} \hat{\sigma}_{xz}^j, & f^m &= \int_0^\infty f(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Граничные условия записываются в виде

$$\hat{\sigma}_{xz}^m(n, z)|_{z=0} = \hat{\sigma}_{zz}^m(n, z)|_{z=0} = 0. \quad (3.17)$$

Система (3.15) может быть записана в векторной форме:

$$\frac{h}{2} \vec{V}(z, n, m) + A(z, n) \vec{V}(z, n, m) = \vec{F}(z, n, m), \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{V}(z, n, m) &= (\hat{\sigma}_{zz}^m(z, n), \hat{\sigma}_{xx}^m(z, n), \hat{u}_x^m(z, n), \hat{u}_z^m(z, n), \hat{\sigma}_{xz}^m(z, n))^T, \\ \vec{F}(z, n, m-1) &= (f_1^{m-1}(z, n), f_2^{m-1}(z, n), f_3^{m-1}(z, n), f_4^{m-1}(z, n), f_5^{m-1}(z, n))^T, \end{aligned}$$

$$A(z, n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_n \lambda & -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & -k_n (\lambda + 2\mu) & -\lambda \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{k_n}{\rho} & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_n}{\rho} \\ 0 & 0 & -\mu \frac{\partial}{\partial z} & \mu k_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Конечные интегральные косинус-, синус-преобразования Фурье (3.9) переменной x и интегральное преобразование Лагерра (3.13) по переменной t позволили

нам свести решение исходной задачи (3.6)–(3.8) к решению одномерной задачи (3.15)–(3.17) по переменной z .

Для решения задачи (3.15)–(3.17) воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных по переменной z . С этой целью введем по данной координате “сдвинутые” сетки [46] с шагом $\Delta z = b/K$:

$$\omega = \{z_i = i\Delta z; \quad i = 0, \dots, K\}, \quad \omega_{1/2} = \{z_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta z; \quad i = 0, \dots, K - 1\}.$$

При этом значения компонент $\hat{\sigma}_{zz}^m(n, z)$, $\hat{\sigma}_{xx}^m(n, z)$, $\hat{u}_x^m(n, z)$ определим в узлах сетки ω , а значения компонент $\hat{\sigma}_{xz}^m(n, z)$ на $\hat{u}_z^m(n, z)$ – в узлах сетки $\omega_{1/2}$.

Определим искомый вектор решения $\vec{W}(m, n)$ как

$$\vec{W}(n, m) = (\vec{V}_0(n, m), \vec{V}_1(n, m), \dots, \vec{V}_K(n, m))^T,$$

где

$$\vec{V}_0 = (\hat{\sigma}_{zz}(z_0), \hat{\sigma}_{xx}(z_0), \hat{u}_x(z_0))^T,$$

$$\vec{V}_i = (\hat{u}_z(z_{i-1/2}), \hat{\sigma}_{xz}(z_{i-1/2}), \hat{\sigma}_{zz}(z_i), \hat{\sigma}_{xx}(z_i), \hat{u}_x(z_i))^T, \quad i = 1, \dots, K.$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений, которая в векторной форме может быть записана в следующем виде:

$$\left(A_\Delta(n) + \frac{h}{2} E \right) \vec{W}(n, m) = \vec{F}_\Delta(n, m - 1), \quad (3.20)$$

где

$$\vec{F}_\Delta(n, m - 1) = (\vec{F}_0, \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_K)^T,$$

$$\vec{F}_i = \begin{cases} (f_1^{m-1}(z_0, n), f_2^{m-1}(z_0, n), f_3^{m-1}(z_0, n))^T, & i = 0; \\ (f_4^{m-1}(z_{i-1/2}, n), f_5^{m-1}(z_{i-1/2}, n), f_1^{m-1}(z_i, n), f_2^{m-1}(z_i, n), f_3^{m-1}(z_i, n))^T, & i = 1, \dots, K. \end{cases}$$

Здесь $\vec{W}(n, m)$ – вектор решения, $A_\Delta(n)$ – ленточная матрица, не зависящая от параметра m . $A_\Delta(n)$ получена из оператора $A(z, n)$ (3.19) с помощью конечно-разностной аппроксимации производных по z с четвертым порядком точности на сетках ω , $\omega_{1/2}$. Правая часть системы $\vec{F}_\Delta(n, m - 1)$ имеет рекуррентную зависимость от параметра m . Это дает нам возможность воспользоваться быстрыми алгоритмами при решении системы линейных алгебраических уравнений для большого набора правых частей, например, методом Холецкого.

Таким образом, решение исходной задачи (3.6)–(3.8) может быть определено из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.20) с последующим использованием формул обращения (3.10) и (3.14). Заметим, что последовательность компонент волнового поля в векторе решения $\vec{V}(z, n, m)$ выбирается с учетом минимизации количества диагоналей матрицы $A_\Delta(n)$. При этом на главной диагонали матрицы располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве сомножителя параметр $h/2$ (параметр преобразования по Лагерру). Выбор параметра h позволяет существенно влиять на обусловленность матрицы $A_\Delta(n)$.

3.2.4. Применение преобразования Лагерра для уравнений второго порядка

Рассмотрим применение преобразования Лагерра для двумерных задач акустики:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2(x, z)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \partial(x - x_0) \partial(z - z_0) f(t). \quad (3.21)$$

Будем искать его решение, удовлетворяющее нулевым начальным данным

$$U|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (3.22)$$

и граничным условиям на свободной поверхности

$$\frac{\partial U}{\partial z}|_{z=0} = 0. \quad (3.23)$$

Полагаем $v_p(x, z)$ – кусочно-непрерывная функция двух координат. Источник с координатами x_0, z_0 моделируется правой частью уравнения (3.21), временной сигнал в источнике задан функцией $f(t)$.

Для решения задачи (3.21)–(3.23) воспользуемся конечным косинус-преобразованием Фурье

$$R(z, n, t) = \int_0^a U(z, x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (3.24)$$

с формулой обращения

$$U(z, x, t) = \frac{1}{a} R(z, 0, t) + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} R(z, n, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (3.25)$$

Уравнение, полученное после преобразования, содержит члены $\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0}, \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=a}$.

Введем дополнительные граничные условия

$$\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=a} = 0, \quad U|_{z=b} = 0$$

и будем рассматривать волновое поле до момента $t < T$, где T – минимальное время распространения переднего фронта волны до отражающих поверхностей $x = a, z = b$.

После применения конечного косинус-преобразования Фурье (3.24), (3.25) к задаче (3.21)–(3.23) приходим к следующим уравнениям:

$$\sum_{l=0}^M c(l, n, z) \left[\frac{\partial^2 R(z, l, t)}{\partial z^2} - k_n^2 R(z, l, t) \right] = \frac{\partial^2 R(z, n, t)}{\partial t^2} - \Phi(z, n) f(t), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}|_{z=0} = R|_{z=b} = 0, \quad R|_{t=0} = \frac{\partial R}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (3.27)$$

где

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \Phi(z, n) = -v_{\text{P}}^2(x_0, z) \cos(k_n x_0) \delta(z - z_0),$$

$$c(l, n, z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^a v_{\text{P}}^2(x, z) \cos(k_n x) dx, & l = 0; \\ \frac{2}{\pi} \int_0^a v_{\text{P}}^2(x, z) \cos(k_n x) \cos(k_l x) dx, & l = 1, 2, \dots, M. \end{cases}$$

Размерность системы (3.26) определяется числом членов M бесконечного ряда, которые необходимо просуммировать в (3.25) для получения решения с требуемой точностью. Выбор значения M зависит как от спектра Фурье временного сигнала $f(t)$, так и от размеров вычислительной области по координате x . Задачу (3.26), (3.27) можно переписать в векторном виде:

$$\frac{\partial^2 \vec{R}(z, t)}{\partial t^2} + A(z) \vec{R}(z, t) = \vec{\Phi}(z) f(t), \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \vec{R} \Big|_{z=b} = 0, \quad \vec{R} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.29)$$

Здесь

$$\vec{R}(z, t) = (R(z, 0, t), R(z, 1, t), \dots, R(z, M, t))^T,$$

$$\vec{\Phi}(z) = (\Phi(z, 0), \Phi(z, 1), \dots, \Phi(z, M))^T.$$

Матрица-оператор $A(z)$ представима как

$$A(z) = C(z)K(z), \quad (3.30)$$

где матрицы-операторы $C(z)$ и $K(z)$ имеют вид:

$$K(z) = \text{diag} \left(k_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, k_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \dots, k_l^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

$$C(z) = \begin{pmatrix} c(0, 0, z) & c(1, 0, z) & \cdots & c(M, 0, z) \\ c(0, 1, z) & c(1, 1, z) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c(0, M, z) & c(1, M, z) & \cdots & c(M, M, z) \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации пространственных производных по координате z можно воспользоваться конечно-разностными схемами высокого порядка точности. В этом пункте с целью упрощения выкладок мы воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных второго порядка точности.

Введем по переменной z равномерную сетку

$$\omega = \{z_i = (i - 1)\Delta z; i = 1, \dots, K + 1; b = K\Delta z\}.$$

После дискретизации решение (3.28), (3.29) сводится к решению задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В векторном виде это представимо как

$$\frac{\partial^2 \vec{Z}(t)}{\partial t^2} + A_\Delta \vec{Z}(t) = \vec{\Phi}_\Delta f(t), \quad (3.31)$$

$$\vec{Z}|_{t=0} = \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (3.32)$$

где A_Δ – положительная блочно-трехдиагональная симметричная матрица, конечно-разностный аналог A (3.30). Здесь

$$\vec{Z}(t) = (\vec{R}_1(t), \dots, \vec{R}_K(t))^T, \quad \vec{\Phi}_\Delta = (\vec{\Phi}(z_0), \dots, \vec{\Phi}(z_K))^T.$$

Применим к задаче (3.31), (3.32) интегральное преобразование Лагерра по переменной t :

$$\vec{Q}(m) = \int_0^\infty \vec{Z}(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht) \quad (3.33)$$

с формулой обращения

$$\vec{Z}(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^\infty \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{Q}(m) l_m^\alpha(ht). \quad (3.34)$$

Как видно из формулы (3.34), значение параметра α должно быть ≥ 2 для удовлетворения начальных условий (3.32). Коэффициенты $\vec{Q}(m)$ удовлетворяют краевой задаче

$$\frac{h^2}{4} \vec{Q}(m) + A_\Delta \vec{Q}(m) = \vec{\Psi}(m-1), \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \vec{Q}(m)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \vec{Q}(m) \Big|_{z=b} = 0, \quad (3.36)$$

где

$$\vec{\Psi}(m-1) = f_m \vec{\Phi}_\Delta + h^2 \sum_{j=0}^{m-1} (m-j) \vec{Q}(j), \quad f_m = \int_0^\infty f(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht).$$

Таким образом, задача свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений, в компактной записи имеющая вид

$$\left(\frac{h^2}{4} E + A_\Delta \right) \vec{Q}(m) = \vec{\Psi}(m-1). \quad (3.37)$$

Матрица полученной системы блочно-трехдиагональна, симметрична и положительно определена. Кроме того, матрица не зависит от параметра m – показателя степени полинома Лагерра. От этого параметра зависит рекуррентным образом лишь правая часть. Как уже было отмечено выше, это дает нам возможность воспользоваться быстрыми алгоритмами для решения системы линейных алгебраических уравнений для большого набора правых частей.

Таким образом, решение исходной задачи (3.21)–(3.23) может быть определено из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.37) с последующим использованием формул обращения (3.25) и (3.34).

3.2.5. Некоторые аспекты численной реализации метода и результаты моделирования волновых полей

В аналитических преобразованиях Фурье и Лагерра при определении значений функций по их спектру используются формулы обращения в виде сумм с бесконечным пределом. При численной реализации необходимым условием является определение требуемого количества членов суммируемого ряда для построения решения с заданной точностью. Так количество гармоник в формулах обращения преобразования Фурье (3.10), (3.25) зависит от пространственной длины волны в моделируемой среде, определяющейся спектром временного сигнала $f(t)$ в источнике, и от размера вычислительной области, задаваемой конечными пределами интегрального преобразования. Кроме того, скорость сходимости суммируемого ряда зависит от гладкости функций моделируемого волнового поля. Количество гармоник по Лагерру, необходимых для определения функций по формулам (3.14), (3.34), зависит от задаваемого сигнала в источнике $f(t)$ и значения временного интервала восстанавливаемого волнового поля. Определить их количество можно следующим образом. Сначала находим коэффициенты разложения для заданной функции $f(t)$ по формуле

$$f_m = \int_0^{\infty} f(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^{\alpha}(ht) d(ht),$$

где l_m^{α} – функции Лагерра. Далее можно вычислить коэффициенты разложения по Лагерру для функции $f(t + T_0)$, используя аналитическую формулу решения акустической задачи для плоской волны [8]:

$$f_k = \sum_{m=0}^k f_m L_{k-m}^0(hT_0) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m L_{k-m-1}^0(hT_0),$$

где L_m^0 – ортонормированные полиномы Лагерра нулевого порядка.

Анализируя сходимость вычисленных таким образом коэффициентов, можно найти требуемое количество гармоник для восстановления волнового поля в заданный момент времени T_0 .

Зависимость характера спектра гармоник от параметров α и h , а также его сходимость подробно рассмотрены в [100], где показано, что чем больше время вступления сигнала, тем более сдвинут вправо его спектр по Лагерру.

Результаты численных расчетов волнового поля для задачи (3.6)–(3.8) в случае трехслойной контрастной модели среды типа атмосфера–океан–земная кора представлены на рис. 3.1. Источник типа центр расширения с координатами $x_0 = 0$ км, $z_0 = 20$ км.

Физические характеристики однородных изотропных слоев были заданы следующие:

- 1) верхний слой (атмосфера): $v_P = 0.336$ км/с, $v_S = 0$ км/с, $\rho = 0.001$ г/см³;
- 2) средний слой (океан): $v_P = 1.5$ км/с, $v_S = 0$ км/с, $\rho = 1.0$ г/см³;
- 3) нижний слой (земная кора): $v_P = 5.0$ км/с, $v_S = 3.0$ км/с, $\rho = 2.5$ г/см³.

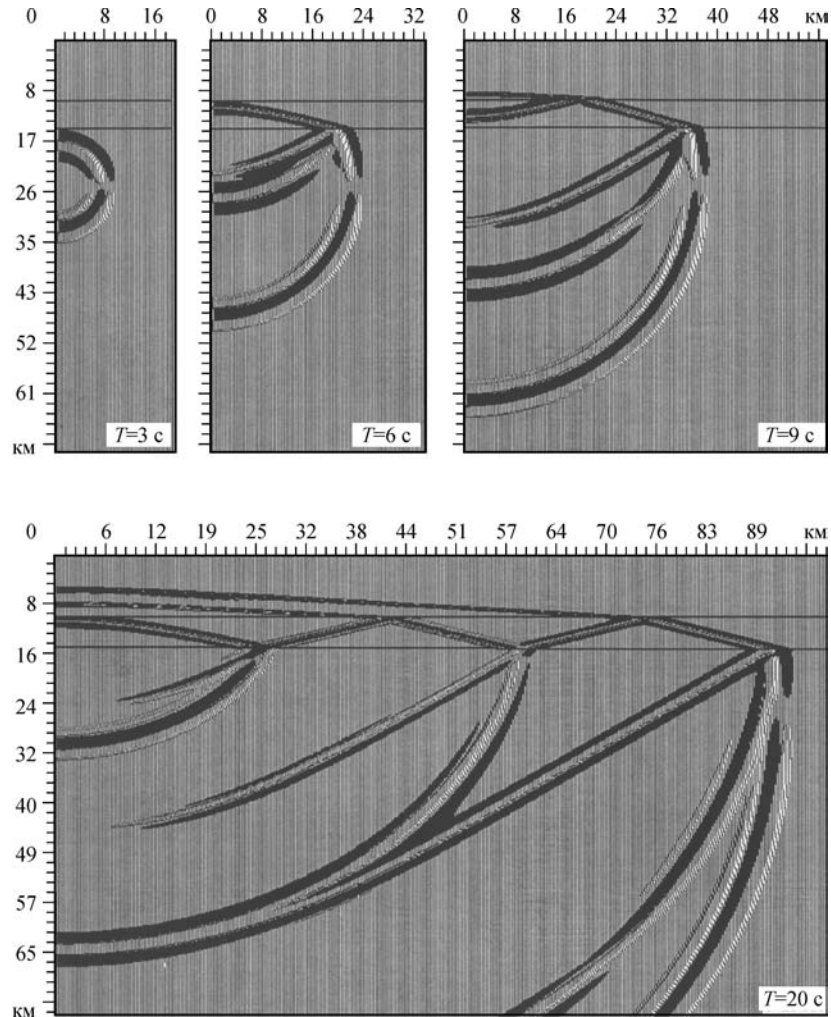


Рис. 3.1. Мгновенные снимки волнового поля для U_z -компоненты: при $T = 3, 6, 9$ с (верхний) и $T = 20$ с (нижний)

Границы раздела слоев показаны сплошной горизонтальной линией. Глубина залегания верхней границы $z = 10$ км, для нижней $z = 15$ км. В качестве сигнала в источнике была задана функция вида

$$f(t) = \exp\left(-\frac{(2\pi(t-t_0)f_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi(t-t_0)f_0),$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 1$ Гц, $t_0 = 1.5$ с.

В заключение отметим, что в данной главе предложен метод решения прямых динамических задач сейсмологии с использованием интегрального преобразования

Лагерра по временной координате. В отличие от классических преобразований Фурье и Лапласа применение преобразования Лагерра приводит к системе уравнений, в которой параметр разделения входит в рекуррентном виде только в правую часть. После сведения задачи к системе алгебраических уравнений со множеством правых частей используются быстрые алгоритмы решения на основе разложения по схеме Холецкого.

3.3. Обратные задачи теории распространения упругих волн

Объектом рассмотрения в этом пункте будут обратные задачи для уравнений, описывающих процессы распространения упругих волн в изотропной и анизотропной средах с аксиальной симметрией и одномерной зависимостью характеристик неоднородной среды с глубиной. Задачи с большей размерностью будут кратко рассмотрены ниже. Общие уравнения упругой среды имеют в качестве коэффициентов одномерные функции $a_{ij}(z)$, $i, j = 1, 2, \dots, 6$, и плотности $\rho(z)$ произвольные функции координаты z . Поэтому несмотря на то, что процессы распространения волн имеют здесь пространственный трехмерный характер, обратные задачи обычно называют одномерными, отмечая тем самым тип модели изучаемой среды. (В последнее время размерность таких задач стали называть 1.5D, подчеркивая их большую сложность, чем 1D-задачи.)

Обратные задачи сейсмических методов исследования состоят в определении функций $a_{ij}(z)$ и $\rho(z)$ в полупространстве $z \geq 0$, если на его поверхности $z = 0$ заданы напряжения σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} как функции от x , y , t , а также режим колебаний $u(x, y, 0, t)$, $v(x, y, 0, t)$ и $w(x, y, 0, t)$. Вместо напряжений на границе $z = 0$ могут быть заданы объемные силы $F_x(x, y, z, t)$, $F_y(x, y, z, t)$ и $F_z(x, y, z, t)$ внутри полупространства.

В нашей обратной задаче ищется совокупность одномерных функций $a_{ij}(z)$ и плотность $\rho(z)$, поэтому для единственности их определения не обязательно использовать информацию, получаемую от большого количества источников на границе и, соответственно, измерять все поля от этих источников. В частности, не обязательно рассматривать двумерную область распределения источников. Такая информация может оказаться переопределенной из-за существования инвариантности полей по отношению к сдвигам отрезка между источником и приемником вдоль плоскости $z = 0$ при сохранении параллельности силы и регистрируемой компоненты. Переопределенность в задании исходной информации для обратных задач создает трудности в согласовании измеряемых данных для обеспечения существования решения этой задачи.

Целесообразно рассмотреть “базовые” постановки обратных задач с сосредоточенными источниками нескольких типов. Такие постановки для изотропной вертикально-неоднородной среды были впервые рассмотрены в [1, 3]. Изложим здесь схематично постановки задач и алгоритмы их решения.

3.3.1. Определение $v_P(z)$, $v_S(z)$ и $\rho(z)$ по данным от двух точечных источников

Допустим, что на границе $z = 0$ приложена нормальная сосредоточенная сила интенсивности $\delta(t)$ соответственно соотношениям

$$\sigma_z|_{z=0} = \delta(x)\delta(y)\delta(t), \quad \tau_{xz}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{yz}|_{z=0} = 0. \quad (3.38)$$

Начальное состояние среды предполагается невозмущенным:

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad v(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad w(x, y, z, t)|_{t=0} = 0. \quad (3.39)$$

Математическая модель процессов распространения упругих волн в трехмерно-неоднородной изотропной среде включает в себя кроме граничных условий (3.38) и начальных данных (3.39) еще систему уравнений Ламе:

$$(\tau + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U} + \operatorname{grad} \lambda \cdot \operatorname{div} \mathbf{U} + \sum_{l=0}^3 \left[\operatorname{grad} \mu \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l} + \operatorname{grad}_{x_l} \right) \right] i_l = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}, \quad (3.40)$$

где $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$ и $\rho(x, y, z)$ – характеристики изотропной среды.

Предположим, что в точках границы $z = 0$ измерены компоненты вектора смещений $\mathbf{U} = \tilde{U} \vec{i} + V \vec{j} + W \vec{k}$, причем

$$\begin{aligned} U(x, y, 0, t) &= G_x(x, y, t), & V(x, y, 0, t) &= G_y(x, y, t), \\ W(x, y, 0, t) &= G_z(x, y, 0, t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

На основе данных (3.41) попытаемся определить искомые функции λ , μ , ρ или какие-либо комбинации этих функций. Рассмотрим одномерную среду: $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. Введем функции

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(z, t) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z, t) dx dy, & \mathbf{V}(z, t) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} V(x, y, z, t) dx dy, \\ \mathbf{W}(z, t) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} W(x, y, z, t) dx dy. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Из-за осевой симметрии источника и, следовательно, всего поля имеем

$$\mathbf{U}(z, t) \equiv 0, \quad \mathbf{V}(z, t) \equiv 0.$$

(Эти равенства при $z = 0$ могут служить критерием осевой симметрии всей задачи.) Для функции $\mathbf{W}(z, t)$ выполнено одномерное волновое уравнение, которое можно получить, проинтегрировав почленно уравнение (3.40) по x и y по всей плоскости при фиксированных z .

Перейдем к стандартным в сейсмических исследованиях обозначениям:

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

где $v_P(z)$ – скорость распространения продольной волны.

Окончательно имеем задачу

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial \rho v_{\text{P}}^2}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{v_{\text{P}}^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (3.43)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{\rho(0)v_{\text{P}}(0)^2}(t), \quad (3.44)$$

$$W|_{t<0} \equiv 0. \quad (3.45)$$

Можно видеть, что к этой задаче мы придем, полагая в исходной системе (3.40)

$$U \equiv V \equiv 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \equiv 0, \quad a_{11}(z) = \lambda + 2\mu.$$

Наша обратная задача состоит в определении функций $v_{\text{P}}(z)$ и $\rho(z)$ или некоторой комбинации от них. Для решения этой задачи мы располагаем исходной информацией, состоящей в задании функции

$$W(0, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G_z(x, y, t) dx dy = G_z(t). \quad (3.46)$$

Целесообразно отметить физический смысл перехода от функции $U(x, y, z, t)$ к $W(z, t)$.

В силу принципа взаимности между источником типа вертикальной силы и приемником, регистрирующим компоненту $W(x, y, z, t)$ смещений, функцию $W(z, t)$ можно рассматривать как интегральный эффект колебания точки $(0, 0, z)$, вызванный одновременно действующими в точках $(x, y, 0)$ распределенными по всей плоскости $z = 0$ вертикальными силами (нормированными по амплитуде для получения “плоского фронта” волны с конечной амплитудой).

Пусть

$$x = \int_0^z \frac{d\zeta}{v_{\text{P}}(\zeta)}, \quad \sigma_{\text{P}}(x) = \rho(x)v_{\text{P}}(x), \quad (3.47)$$

$$W(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{W}(x, \omega)}{\sqrt{\sigma_{\text{P}}(x)\sigma_{\text{P}}(0)}} e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.48)$$

Тогда в новых переменных $x, W(x, \omega)$ задача приобретает вид

$$\frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} + \{\omega^2 - q(x)\} \tilde{W} = 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{d\tilde{W}}{dx} - h = 1 \quad \text{при } x = 0. \quad (3.50)$$

Непрерывная функция $q(x)$ определяется формулой

$$q(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma'_{\text{P}}}{\sigma_{\text{P}}} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\sigma''_{\text{P}}}{\sigma_{\text{P}}}, \quad (3.51)$$

а величина h имеет значение

$$h = -\frac{\sigma_P'(0)}{\sigma_P(0)}. \quad (3.52)$$

Сведем теперь задачу определения $q(x)$ и одновременно $\sigma_P(x)$ к известной обратной спектральной задаче для уравнения типа Штурма–Лиувилля.

Эта задача изучена в работах В. А. Марченко [117] и М. Г. Крейна [104], И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [63], где показано, что по спектральной функции задач (3.49), (3.50) однозначно восстанавливается функция $q(x)$.

Используем выводы М. Г. Крейна. Формулу (11.3) можно записать в виде

$$W(z, t) = -\frac{1}{\sqrt{\sigma_P(x)\sigma_P(0)}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (3.53)$$

где $\lambda = \omega^2$, $\varphi(x, \lambda)$ – решение уравнения (3.49), удовлетворяющее условиям $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$. Функция $\rho(\lambda)$ в формуле (3.53) есть спектральная функция системы (3.49), (3.50), она была определена в работе Л. Д. Фаддеева [184].

Формализм М. Г. Крейна состоит в следующих операциях (если $\rho(\lambda)$ известно): вводим функцию

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos \sqrt{\lambda}t d\rho(\lambda) \quad (3.54)$$

в качестве ядра интегрального уравнения М. Г. Крейна

$$\Gamma_{2x}(\tau) + H(\tau) + \int_0^{2x} \Gamma_{2x}(s)H(\tau - s) ds = 0, \quad \tau \leq 2x, \quad (3.55)$$

которое является интегральным уравнением второго рода типа Фредгольма при фиксированном параметре x . Варьируя параметр x и решая каждый раз уравнение М. Г. Крейна, получим функцию $\Gamma_{2x}(2x)$, которая решает обратную задачу (3.49), (3.50) по заданной спектральной функции $\rho(\lambda)$. Решение записывается через $\Gamma_{2x}(2x)$ в следующем виде (см. [3], с. 23):

$$q(x) = 4\Gamma_{2x}^2(2x) + 2\frac{d\Gamma_{2x}(2x)}{dx} \quad (3.56)$$

или

$$\sigma_P(x) = \sigma_P(0)e^{-\int_0^x \Gamma_{2\zeta}(2\zeta) d\zeta}.$$

Если $\Gamma_{2x}(2x)$ определено из уравнения (18.3), то задача решена.

Остается найти спектральную функцию $\rho(\lambda)$ по заданной из измерений функции $G_z(t)$. Из формул (3.54) и (3.46) видно, что

$$H(t) = -\frac{\sigma_P(0)}{2}W'(0, t) = -\frac{\sigma_P(0)}{2}G'_z(t),$$

где $G'_z(t)$ – производная по времени от функции, описывающей суммарное колебание точки $z = 0$. Таким образом, вместо уравнения (3.55) в нашей задаче достаточно решить специальное уравнение М. Г. Крейна

$$\Gamma_{2x}(\tau) + \alpha G'_z(\tau) + \alpha \int_0^{2x} \Gamma_{2x}(s) \Gamma'_z(\tau - s) ds = 0, \quad \tau \leq 2x, \quad (3.57)$$

где $\alpha = -\frac{1}{2}\sigma_P(0)$.

Предполагая, что α известно, по заданной $G_z(t)$ находим из (3.57) и (3.56) функцию $\sigma_P(x) = \rho(x)v_P(x)$. Важно отметить, что из эксперимента с распределенной (или сосредоточенной) вертикальной силой не удается найти порознь $\rho(z)$ и $v_P(z)$. Определяется лишь их произведение $\sigma_P(x)$ (так называемая акустическая жесткость), при том лишь как функция времени пробега x , а не глубины z .

Для определения $v_P(z)$, $v_S(z)$ – скорости поперечных волн и $\rho(z)$ необходимо использовать дополнительный эксперимент.

Допустим, что на границе $z = 0$ приложено воздействие в виде поверхностного момента сил

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\vartheta z} = a(t)b(r) \text{ при } z = 0, \quad (3.58)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vartheta = \arctg \frac{y}{x}$ – цилиндрические координаты. Можно убедиться, что при таком воздействии в вертикально-неоднородной среде возникают только поперечные упругие волны типа SH, вектор смещений $U(r, \vartheta, z, t)$ которых имеет вид $\mathbf{U}(r, \vartheta, z, t) = U_\vartheta(r, z, t)\vartheta_1$, где ϑ_1 – единичный вектор направления роста угла ϑ цилиндрической системы, U_ϑ – компонента вектора \mathbf{U} по направлению ϑ_1 .

Для $U_\vartheta(r, z, t)$ выполняется уравнение

$$\frac{\partial^2 U_\vartheta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\vartheta}{\partial r} - \frac{U_\vartheta}{r^2} + \frac{\partial^2 U_\vartheta}{\partial z^2} + \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} \frac{\partial U_\vartheta}{\partial z} = \frac{\rho(z)}{\mu(z)} \frac{\partial^2 U_\vartheta}{\partial \tau^2}. \quad (3.59)$$

Условие на границе имеет вид

$$\left. \frac{\partial U_\vartheta}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{\mu_0} a(t)b(r),$$

начальные данные $U_\vartheta|_{t<0} \equiv 0$. Положим $a(t) = \delta(t)$, функцию $b(r)$ возьмем в виде

$$b(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty k^2 J_1(kr) dk = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\frac{\delta(r)}{r} \right],$$

где $J_1(kr)$ – функция Бесселя.

Если искать $U_\vartheta(r, z, t)$ в виде интегралов

$$U_\vartheta(r, z, t) = \int_0^\infty U(z, t, k) J_1(k, r) k^2, \quad U(z, t, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(x, k, \omega)}{4\pi \sqrt{\sigma_S(z)\sigma_S(0)}} e^{i\omega t} d\omega,$$

где

$$\sigma_S(z) = \rho(z)v_S(z) = \sqrt{\mu(z)\rho(z)}, \quad x = \int_0^\infty \frac{d\zeta}{v_S(\zeta)},$$

то приходим к задаче

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \{\omega^2 - q_k(x)\}W = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{dW}{dx} - h, \quad W = 1 \text{ при } x = 0, \quad (3.61)$$

причем функция $q_k(x)$ определяется формулой

$$q_k(x) = v_S^2 k^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma'_S}{\sigma_S} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\sigma''_S}{\sigma_S}. \quad (3.62)$$

Система (3.60)–(3.62), в принципе, аналогична системе (3.49), (3.50). Обратная задача для нее решается тем же методом. Благодаря присутствию в этом случае параметра k^2 в формуле (3.62) имеется возможность независимо определить $v_S(z)$ и $\rho(z)$. Это дает возможность определить по формуле (3.56) и $v_P(z)$, учитывая, что $\rho(z)$ уже определена.

Таким образом, одномерные обратные задачи определения скоростей $v_P(z)$ и $v_S(z)$ упругих волн и плотность $\rho(z)$ можно решить с помощью интегрального уравнения М. Г. Крейна. При этом спектральная функция соответствующей системы типа Штурма–Лиувилля определяется по информации о полях колебаний поверхности наблюдений в двух экспериментах формулами типа (3.46), (3.53), (3.54).

В работе [217] рассмотрено четыре типа обратных задач. Именно, показано, что случаи задания режимов колебаний на концах интервала поиска функции $q(x)$ из (3.51) или при падении заданных волн на границы интервала, где $q(x)$ неизвестна, из среды с известным строением приводят к эквивалентным задачам. Там указаны способы построения спектральной функции $\rho(\lambda)$ из (3.53) по информации, заданной в рассматриваемых типах задач.

Приведем результаты решения задачи для модели среды, основанной на реальных измерениях плотностей и скоростей в 228 точках скважины вплоть до глубины 3362 м. Импеданская функция $\sigma(x)$, найденная по этим реальным данным, была затем сглажена, и дальнейшие расчеты проводились уже для гладкого “псевдореального” профиля. На рис. 3.2 представлены оригинальный (тонкая линия) и сглаженный (утолщенная линия) импедансы.

Зондирующая волна $f(t)$ задавалась аналитически:

$$f(t) = \pi^2(1 - 10t)^2 \{1 - \exp[-(25\pi t)^2]\} \sin 50\pi t, \quad 0 < t < 0.1.$$

На рис. 3.3 дан профиль этой волны вместе с соответствующей синтетической сейсмограммой в точке $x = 0$.

На рис. 3.4 приведены графики восстановленных импедансов, построенные по начальным участкам синтетической сейсмограммы длиной 1.6 с (точечная

линия), 2.4 с (штриховая линия) и 3.2 с (тонкая линия). При увеличении длины интервала точность восстановления возрастает. Исходный и восстановленный импедансы становятся практически неразличимы, если длина использованного отрезка сейсмограммы больше 4 с.

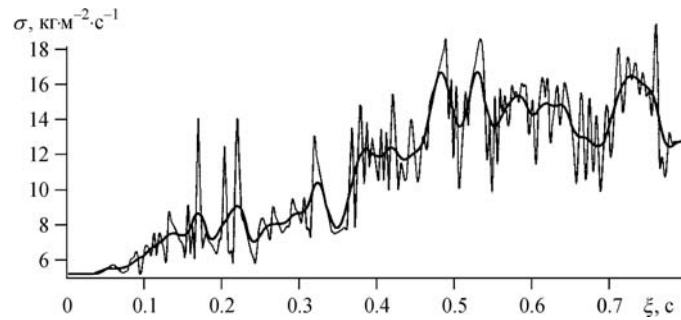


Рис. 3.2. Исходная среда

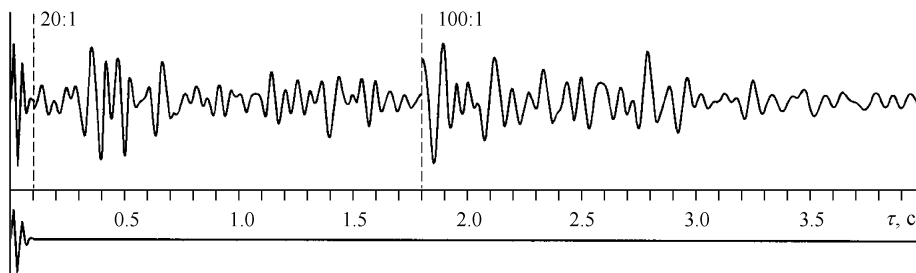


Рис. 3.3. Расчетная сейсмограмма и первичная волна

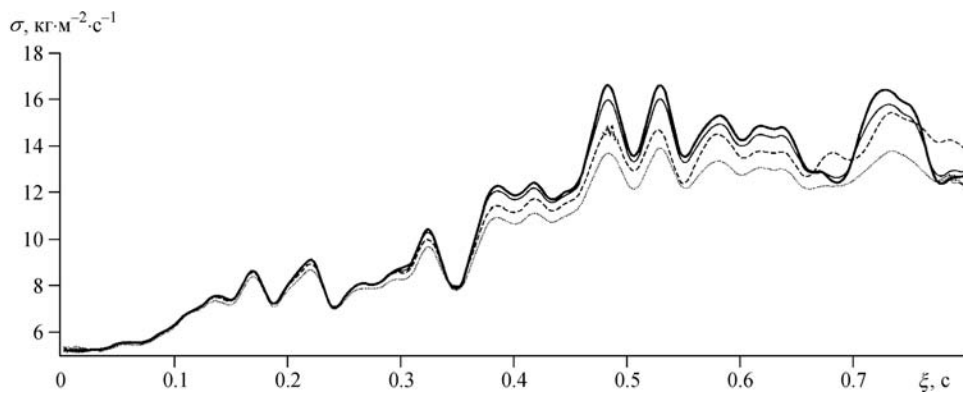


Рис. 3.4. Решение обратной задачи

3.3.2. Обобщение методов решения одномерных обратных задач

В работе [217] показано, что постановка задач из предыдущего пункта легко видоизменяется на случай, если вместо источников колебаний на границе $z = 0$ задается плоская вертикально падающая волна из одномерного полупространства $z < 0$. В частности, в [20] в верхнем полупространстве $z < 0$ рассматривается плоская падающая волна $\psi(z, t) = \psi_1(t - x)$, моделирующая волну от глубокого подвешного источника в море. Обратная задача решается по измерению отраженной волны $\psi_2(t + x)$ от дна, которая дает информацию о внутреннем строении осадочной толщи, полезную при поиске нефти на дне моря.

В работе [20] для решения практической задачи использован конечно-разностный метод решения прямой и обратной одномерных задач с помощью “обратимой схемы”. Идея обращения разностной схемы для задачи типа (3.49), (3.50) дана в [3] и выражается соотношениями:

$$\begin{aligned}\psi_1(n, k + 1) &= (1 + q_n)\psi_1(n + 1, k) - q_n\psi_2(n, k), \\ \psi_2(n, k + 1) &= (1 - q_{n-1})\psi_2(n - 1, k) + q_{n-1}\psi_1(n, k).\end{aligned}$$

где $n, k = 0, 1, 2, \dots$ – номера узлов сетки по переменным $x(x_n = n\Delta x)$ и

$$t(t_k = k\Delta t), \quad q_n = (\sigma_{n+1} - \sigma_n)/(\sigma_{n+1} + \sigma_n), \quad \psi(n, k) = \psi_i(n\Delta x, k\Delta t).$$

Эта схема используется как для решения прямой задачи (определяются функции $\psi_1(t-x)$ и $\psi_2(t+x)$), причем $U(x, t) = (\psi_1 + \psi_2)$, так и для обратной (определяются коэффициенты q_n отражения от отдельных элементарных слоев).

Метод интегральных уравнений позволил рассмотреть также ряд обратных динамических задач о наклонном падении плоских волн в одномерно-неоднородной среде [27]. Эти задачи получают определенные осложнения, если угол наклона падающей волны достаточно велик и возникает неоднородная (экранированная) волна. В этом случае уравнение процесса может перестать быть гиперболическим и приобретает смешанный тип (есть области параболичности и эллиптичности квазиволнового уравнения).

Успешные попытки применить на практике алгоритмы решения одномерной обратной задачи ограничиваются случаями существенной близости реальной среды к одномерной ее модели. Такой случай имеет место при зондировании горизонтальных океанических осадков в глубоком океане с известными первичной и отраженной волнами. В этом случае удается порознь зарегистрировать глубинным гидрофоном прямую волну и отделенную от нее по времени отраженную [20].

Из постановки обратных задач теории распространения волн видно, что они очень чувствительны к модельным помехам и, конечно, к факту неадекватности постановок в отношении размерности модели. Так, если в реальной практике среды в основном трехмерные, то для адекватности, как минимум, требуется использование трехмерных постановок обратных задач.

3.3.3. Приближенные решения многомерных обратных задач

Как указано выше, наиболее полную количественную информацию о строении реальной среды может дать решение трехмерной обратной динамической задачи.

К сожалению, сейчас не получены еще алгоритмы решения таких задач в полной постановке. Поэтому возрастает значение различных приближенных методов решения таких задач. Довольно широкое распространение в последнее время получил “метод визуализации вторичных источников” [35]. Различные модификации этого метода основаны на приближенном представлении волнового поля, рассеянного на дифрагирующем объекте, в виде интеграла Кирхгофа. Затем ищутся приближенные граничные условия на дифрагирующем теле, которые линеаризуют обратную задачу. В ряде случаев такие задачи сводятся к определению правой части в волновом уравнении, которая описывает плотность “вторичных источников”, создающих эквивалентное рассеянное поле.

Основываясь на методах эффективного решения прямых задач для сложных сред, удается успешно использовать технику оптимизации параметров модели по заданным результатам измерений режима колебаний тела в точках наблюдения.

Формально задача ставится так: дано тело D с поверхностью S , заполненное средой со свойствами $C(x, y, z) = C(M)$. Если S_0 – множество точек поверхности S , где производится регистрация колебаний $U(x, y, z, t)$, то требуется по информации $U|_{S_0} = U_0(s_0, t)$; $0 < t < T$, восстановить функцию среды $C(M)$ или ее параметрическое представление.

При таком подходе неизвестная функция $C(M)$ ищется как точка в пространстве допустимых функций $C(M)$, доставляющая минимум целевому функционалу $\Phi[C(M)]$, описывающему отклонение $\Phi[C(M)]$ зарегистрированного поля $U_0(s_0, t)$ от поля для “пробной” модели:

$$\Phi[C(M)] = \int_0^T dt \iint_{s_0} [U_0(s, t) - B\{C(M), M, t\}] ds,$$

где $B\{C(M), M, t\}$ – оператор, переводящий “пробную” функцию $C(M)$ в волновое поле на множестве S_0 . Эта техника для сейсмических задач применяется давно [22, 267], но только в последние годы она получила широкое развитие благодаря эффективным алгоритмам решения прямых задач и быстродействующим компьютерам.

В работе [267] метод оптимизации дополнен итеративным процессом повышения степени аппроксимации оператора средствами спектральных представлений линейных операторов. Такой процесс проиллюстрируем в случае двумерной обратной задачи для волнового уравнения. Модифицированный метод Ньютона решения нелинейного уравнения $A(C) = U_0$ содержит итеративный процесс, предназначенный для получения приемлемых аппроксимаций. Для пояснения процесса запишем

$$DA(C_0) < C_{k+1} - C_k > = A(C_k) - U_0,$$

где $DA(C_0)$ есть производная от оператора A для начальной точки C_0 . Но ее непосредственное использование для решения обратной задачи невозможно, так как DA не имеет ограниченного обратного оператора. Поэтому для численной

реализации требуется некоторая процедура регуляризации. В качестве такой процедуры используется r -псевдообращение – обобщение прямого обращения оператора $(DA(C_0))_r$, которое достигается за счет разложения оператора $DA(C_0)$ по сингулярным векторам (SVD). Число r есть порядок производной $(DA(C_0))_r$ [267, 275]. С использованием этой регуляризации итеративный процесс модифицированного метода Ньютона может быть представлен в следующем виде:

$$C_{k+1} - C_k - (DA(C_0))_r < U_0 - \alpha C_k. \quad (3.63)$$

При определенных предположениях последовательность C_k сходится к $P_r < C_k >$, где C_k есть точное решение обратной задачи, а P_r есть проектор на линейную оболочку сингулярных векторов r -го порядка производной $DA(C_0)$. Порядок r определяется по уровню шумов во входных данных, а также по точности конечномерной аппроксимации оператора A и его производной DA . Нужно заметить, что первый шаг итеративного процесса (3.63) есть линеаризованное обращение волновой формы (обращение Борна).

Вычислительные эксперименты с двумерными задачами поиска изолированных тел показывают повышение разрешающей способности предлагаемого метода обращения по сравнению с методом миграции.

При использовании высокопроизводительных компьютеров и быстрых алгоритмов решения прямых задач можно надеяться исследовать указанным выше методом трехмерные обратные задачи. Но это пока можно рассматривать как оптимистический прогноз.

3.3.4. Совмещенные обратные задачи геофизики

Большая чувствительность обратных задач сейсмологии к “модельным помехам” и слабая устойчивость по отношению к возмущениям исходных данных создают существенные трудности в решении обратных динамических задач сейсмологии. К этим обстоятельствам добавляется еще два: отсутствие в настоящее время конструктивного математического аппарата формального решения; постоянный дефицит реальной исходной информации на практике (весьма дорогостоящей для сейсмических методов).

Исследования условий единственности и устойчивости решений многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений, приведенные в [111, 151], показывают, что эти условия, как правило, не выполняются в практических задачах сейсморазведки и сейсмологии. Специальный анализ точности и полноты регистрации динамических параметров волн в сейсморазведке, проведенный в [67], показывает, что технологии регистрации ориентируются, в основном, на кинематические и усредненные энергетические характеристики волн. Количественная информация о динамике на практике осложнена группированием приборов, автоматическим регулированием уровня амплитуд, фильтрацией помех, узостью частотного диапазона регистрации. Таким образом, использование накопленных практических данных становится проблематичным. Неменьшую проблему составляет сейчас и организация опытно-методических работ с контролем динамических характеристик волн из-за финансовых обстоятельств.

В связи с реальным состоянием работ по использованию теории обратных задач сейсмологии на практике возникает идея дальнейшего развития идеологии количественного комплексирования сейсмических методов с другими геофизическими методами. Прежде всего, целесообразно мобилизовать все имеющиеся информационные ресурсы для построения структурной модели изучаемого геологического объекта с использованием кроме сейсмических данных также измерения других геофизических полей. В частности, большую роль могут играть потенциалы поля (магнитометрия, гравиметрия и т. д.). Измерение этих полей обходится существенно дешевле и способно дать большую информацию (особенно, в смысле числа точек наблюдений, благодаря технологиям авиасъемок).

Как известно, например [181], источники потенциальных полей в общем случае определяются с большой степенью неопределенности. В частности, плотность $\rho(x, y, z)$ трехмерного тела D с границей $S(x, y, z) = 0$ по внешнему потенциалу $V(x, y, z)$, когда $(x, y, z) \in \bar{D}$ определяется с точностью до множества $\rho_0(x, y, z) = S(x, y, z)^2 F(x, y, z)$ с произвольной $F(x, y, z)$ и любой $S(x, y, z) = 0$. Легко видеть, что тело D с плотностью $\rho_0(x, y, z)$ создает нулевой внешний потенциал. Тем не менее вклад гравитационного метода может иметь существенное значение для решения геолого-геофизической задачи. Например, может оказаться важной оценка поверхности $S(x, y, z) = 0$.

Подход к количественной комплексной интерпретации геофизических данных предложен, по-видимому, впервые в работах И. Недялкова [296], причем в достаточно общей форме. На близкие темы было выполнено заметное число исследований [69, 70, 181, 278]. Правда, при этом не давалась постановка какой-либо математической обратной задачи, позволяющей ставить фундаментальные вопросы о единственности, существовании, устойчивости соответствующей задачи. Постановки такого типа имеют прагматический характер и сводятся к процедуре оптимизации функционалов невязки по априорно заданному множеству структурно-физических параметров модели. (В терминах американских работ – это метод совместного обращения.) Опасный характер таких подходов состоит в том, что “решение” может быть найдено всегда, даже если в самой исходной геофизической задаче оно может быть не единственным или не существовать вообще.

Поэтому имеет смысл попытаться поставить совмещенные (многодисциплинарные) задачи в математической форме, позволяющей привлечь для их анализа имеющийся арсенал решения формально поставленных математических задач разного типа. За последние 30–40 лет были подробно исследованы обратные задачи отдельных геофизических методов – гравитики и потенциальных полей (П. С. Новиков [139], В. Н. Страхов [181]); электроразведки (А. Н. Тихонов [183]) и сейсмологии ([3, 111, 151, 8, 22]).

В задачах комплексирования этих методов, как указано выше, имеются лишь оптимизационные подходы, что предполагает наличие большой априорной информации о модели. Между тем основным вопросом как раз и является обоснование выбора такой модели с точки зрения многодисциплинарной исходной информации.

Под совмещенной обратной задачей нескольких геофизических методов условимся понимать следующую математическую задачу:

Пусть дана система уравнений

$$L_\nu(\alpha_\nu, \beta_\nu, U_\nu) = f_\nu(x, t), \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (3.64)$$

где L_ν – матричное уравнение порядка $K \leq 2$, $U_\nu(\alpha_\nu, \beta_\nu, x, t)$ – некоторое геофизическое поле, возбуждаемое источником $f_\nu(x, t)$. (Начальные и граничные условия заданы по t и на границе S , поверхности объема $D \leq R^n$.)

Мы предполагаем, что уравнение $L_\nu = f_\nu$ и соответствующие условия при каждом $\nu = 1, 2, \dots, m$ являются уравнениями одного из совмещаемых геофизических методов, поле которого описывается функцией $U_\nu(\alpha_\nu, \beta_\nu, x, t)$. Параметры α_ν, β_ν имеют смысл векторов, компоненты которых описывают физические (α_ν) и геометрические (β_ν) параметры модели среды для метода с индексом ν . Требуется найти $\alpha_\nu(x, y, z)$ и $\beta_\nu(x, y, z)$.

Систему уравнений (3.64) можно решать индивидуально при каждом ν . Тогда мы получим уравнения для индивидуальных методов, которые интенсивно исследуются в геофизике.

Но можно всю систему ($\nu = 1, 2, \dots, m$ или любую подсистему) рассмотреть как уравнение для некоторого “виртуального” геофизического метода. Эта идея оказывается в ряде случаев весьма продуктивной [4, 8, 22, 69, 70].

Как одно из важных свойств совмещенной задачи (3.64) нужно отметить неэквивалентность ее совокупности отдельных (индивидуальных) задач. Если каждая из индивидуальных задач имеет неединственное решение, то совмещенная задача может иметь единственное решение. Это может произойти, например, если в каждой индивидуальной задаче присутствуют повторяющиеся, чаще всего геометрические, параметры. Это свойство целесообразно назвать свойством дополненности геофизических задач при описании одного и того же геологического объекта.

Красивый и простой пример такой дополненности привел И. Недялков [296] при интерпретации гравитационной и электрической аномалий от однородного шара, помещенного в однородное полупространство. Как известно, отдельно по каждой из аномалий не могут быть однозначно определены ни положение центра шара, ни его радиус, ни избыточная плотность, ни избыточная электропроводность. Можно в каждом случае определить лишь двухпараметрические поверхности. Однако, учитывая, что аномалии относятся к одному и тому же геологическому телу, достаточно найти в каждом из двух семейств совпадающие поверхности. Это однозначно определяет все четыре неизвестных параметра. Нужно особо отметить, что решение получено без привлечения какой-либо дополнительной информации, а только за счет совмещения задач.

Можно отметить несколько типов совмещенных задач:

- А. Некоторые геометрические характеристики тел в рамках нескольких совмещенных методов совпадают.
- В. Некоторые коэффициенты уравнений в системе (3.64) совпадают.

- С. Некоторые коэффициенты уравнений имеют функциональные или статистические связи.
- Д. Некоторые уравнения в системе (3.64) содержат несколько геофизических полей и соответствующих характеристик.

Приведенная классификация имеет лишь описательный характер и явно неполна. Некоторые из этих типов задач рассмотрены в [8, 22].

Уже отмечалось выше, что построение полной количественной модели среды с помощью математического аппарата обратных задач удается довольно редко. Эти постановки чаще могут служить для “шлифовки” априорно данных моделей с помощью междисциплинарной информации. В этом отношении важное значение имеет задача из [22], относящаяся к типу С.

Рассмотрим систему (3.64) и предположим, что искомые физические и геометрические характеристики среды связаны статистическими соотношениями.

Векторы α_ν и β_ν скомбинируем в единый вектор $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu\}$ и будем считать его случайным с известными средними значениями $\langle a_i \rangle = a_i^0$. Полный вектор $\alpha(x)$ имеет среднее $\alpha^0(x)$ и известную ковариантную матрицу $G_\alpha(x)$. В геологии такая информация может быть получена из петрофизических справочников.

Будем предполагать, что прямые задачи для каждого из уравнений в системе (3.64) с начальными и граничными условиями имеют единственное решение.

В обратной задаче отыскивается среднее значение случайной функции $\alpha(x)$ и оценивается ее дисперсия по информации, заданной в виде

$$V_\nu(\bar{x}, t) = U_\nu(\bar{x}, t) + \varepsilon_\nu(\bar{x}, t),$$

где $\bar{x} \subset S_\nu \subset D$, а D – изучаемое геологическое тело. Вектор ошибки $\varepsilon_\nu(\bar{x}, t)$ предполагается нормально распределенным с матрицей ковариации $G_\varepsilon(x, t)$.

В работе [234] получен следующий результат.

Пусть $M_{\alpha^0}^c = \{\alpha(x); \|\alpha - \alpha^0\|_{B_2}^2 \leq C^2\}$ обозначает множество векторов $\alpha(x)$, ограниченное по норме Гильбертова пространства B_2 с метрикой

$$\|\alpha - \alpha^0\|_{B_2} = \int (\alpha - \alpha^0)^T B_2(q) (\alpha - \alpha^0) dq,$$

где $B_2(q) = G_\alpha^{-1}(x) \delta(t)$; $q \subset Dx[0, T_0]$, T_0 – интервал времени наблюдения, $G_\alpha(x)$ – матрица кросскорреляции компонентов $\alpha(x)$, T – знак транспонирования.

Предположим, что для некоторых $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, принадлежащих множеству $M_{\alpha^0}^c$, выполняется неравенство

$$\sum_{\nu=1}^m \int_q \left\{ U_\nu^{1*} \left[\left(-\frac{\partial L_\nu}{\partial \alpha_1} \right) U_\nu^1 \right]^T - U_\nu^{2*} \left[\left(-\frac{\partial L_\nu}{\partial \alpha_2} \right) U_\nu^2 \right]^T \right\} (\alpha_1 - \alpha_2) dq + 2C^2 \geq 0,$$

здесь U_ν^i – решение прямых задач для методов $L_\nu(\alpha_1, t) = f_\nu(x, t)$, вектор-функция U_ν^* – решения задач (прямых) для сопряженных уравнений

$$L_\nu^*(\alpha_i, t) U_\nu^i = [V_\nu(\bar{x}, t) - U_\nu(\bar{x}, t, \alpha_i)] G_\varepsilon^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

с нулевыми начальными и граничными условиями. Пусть $\delta(S)$ – обобщенная функция нулевой системы на множестве S_ν , $\nu = 1, 2, \dots, m$. Тогда решение совмещенной обратной задачи единственно и последовательность $\alpha_i(x) \subset M_{\alpha^0}^c$, $i = 1, 2, 3, 4$, минимизирующая функционал

$$I(\alpha) = \sum_{\nu=1}^m \|V_\nu(\bar{x}, t) - U_\nu(q, \alpha)\|_{B_1}^2 + \|\alpha - \alpha^0\|_{B_2}^2,$$

слабо сходится к решению нашей обратной задачи. Здесь $B_1(q) = G_\varepsilon^{-1}(q)\delta(s)$; $S = \sum S_\nu$.

Точность (оценка дисперсий) и устойчивость решения могут быть охарактеризованы соотношениями

$$\sigma_\ell^2 \leq 2^{2(1-m)} \max\{\sigma_{\nu\ell}\} \sigma_\ell^0, \quad \ell = 1, 2, \dots, L, \quad (3.65)$$

где σ_ν – дисперсия, оцениваемая из совмещенной задачи; $\sigma_{\nu\ell}$ – дисперсия, оцениваемая из индивидуальных методов; σ_ℓ^0 – квадратный корень из диагонального элемента с индексом (ℓ, ℓ) в матрице $G_{\alpha^0}^{-1}$. Знак равенства в соотношении (3.65) достигается, если все $\alpha_\nu(x)$ статистически независимы. Очевидно, что при возрастании числа методов точность определения $\alpha(x)$ тоже возрастает. Однако метод с очень низкой точностью оценки $\sigma_{\nu\ell}$ при его добавлении в систему может снизить эффект возрастания суммарной точности. Такой метод желательно исключить.

То же замечание можно сделать и относительно общей постановки совмещенных обратных задач – методы, существенно снижающие точность и устойчивость решения этих задач, не следует включать в состав системы уравнений индивидуальных методов.

Для задач разных типов (А, В, С, D) возможны индивидуальные особенности, которые можно выявить, применяя общие математические подходы к решению соответствующих систем уравнений.

3.4. Заключение

Опыт практического использования методов численного моделирования динамических свойств волн в сейсморазведке и в сейсмологии в течение 30 лет приводит авторов главы к весьма “осторожно оптимистическим выводам”. Применение прямых задач в разные годы и в разных проблемах неоднократно приносило успех, когда речь шла о выяснении физической природы регистрируемых волн и общих закономерностей формирования сложных характеристик общей структуры волнового поля. Одним из первых и достаточно успешных опытов был анализ природы волн в ГСЗ в 60–70-е годы, когда динамические методы анализа позволили существенную по энергии и информации часть волнового поля квалифицировать как запредельно-отраженные волны от глубинных границ в земной коре. Кинематические признаки идентификации волн на больших расстояниях от

источников оказались неоднозначными из-за прямолинейности годографов волн разной физической природы.

Массовые расчеты динамики волн в ГСЗ практически для всех районов работ к 1980-м годам позволили уточнить модели земной коры.

В сейсморазведке прямые динамические задачи также сыграли во многих районах важную роль. Часто возникала проблема определения скоростей верхней части разреза и неэффективности суммирования волн. В частности, в Красноярском крае в Юрупчено-Тахомской зоне на некоторых участках не выделялись отраженные волны (не суммировались) из-за сложного строения верхней части разреза и интенсивных, многократно отраженных волн, связанных с траповыми полями. После использования чисто геологической схемы строения и переосмысливания природы волн удалось разобраться с “суммированием”. Такие примеры встречались и вне нашей практики, поскольку методы расчета динамики волн были широко распространены в период изучения Тюменских нефтяных провинций.

Как уже говорилось, гораздо меньше практического опыта накоплено в применении обратных динамических задач. Это, по-видимому, закономерно, так как методов синтеза сложных многомерных моделей среды с помощью формализма обратных динамических задач пока не создано.

Здесь чаще всего применяют методы оптимизации, которые возвращают дело к решению большого количества прямых задач.

С этой ситуацией приходится смириться. Ведь окончательное подтверждение правильности модели среды, как бы эта модель ни была построена из геофизических данных, из геологических схем, из междисциплинарных обобщений, дается в результате совпадения расчетных данных по прямой задаче с наблюдаемыми материалами.

Наиболее общий и очевидный вывод из опыта развития динамических моделей сейсмологии – актуальность дальнейшего развития методов решения прямых задач с использованием современных высокопроизводительных ЭВМ. Так же актуальна разработка методов решения многомерных обратных динамических задач сейсмологии, в том числе в совмещенных постановках с другими геофизическими методами.